НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМЕНІ В.М.ГЛУШКОВА

На правах рукопису

ЄМЕЦЬ Олег Олексійович

ТЕОРІЯ І МЕТОДИ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЕВКЛІДОВИХ МНОЖИНАХ В ГЕОМЕТРИЧНОМУ ПРОЕКТУВАННІ

01.05.01 - теоретичні основи інформатики та кібернетики
(математична кібернетика)

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Харківського державного технічного університету радіоелектроніки.

Науковий консультант: член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор СТОЯН Ю. Г.

Офіційні опоненти: член-кор. НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор ШОР Н. З.,

доктор фізико-математичних наук, професор ПЕРЕПЕЛИЦЯ В. О.,

доктор фізико-математичних наук, професор ЯКОВЛЄВ С. В.

Провідна установа: Національний університет ім. Тараса Шевченка, (м. Київ).

Захист відбудеться "__" __________ 1997 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України за адресою: 252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічному архіві Інституту.

Автореферат розісланий "____" ____________ 1997 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В.Ф.

1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність роботи. Розвиток математичного програмування, застосування його в різних галузях, які зв'язані з вибором одного з можливих варіантів дії (при вирішенні проблем управління і планування виробничих процесів, в задачах геометричного проектування та інших), сприяло появі великої кількості праць, що присвячені задачам оптимізації на комбінаторних множинах.

Різним аспектам розв'язання цих проблем присвячені роботи ряду провідних наукових центрів і дослідників. Серед них в першу чергу - В.О. Ємелічев, Ю.І. Журавльов, М.М. Ковальов, В.К. Леонтьєв, І.М. Ляшенко, В.С. Михалевич, В.О. Перепелиця, І.В.Сергієнко, Ю.Г. Стоян, В.С. Танаєв, Н.З. Шор, В.О. Трубін, С.В. Яковлєв та інші.

Подальший розвиток теорії та методів геометричного проектування дозволяють зробити висновок про важливість і назрілість розробок нових підходів та методів до розв'язання задач оптимізації комбінаторного типу і в цілому теорії комбінаторної оптимізації.

Наявність специфіки у широкого класу задач геометричного проектування дозволяє застосовувати формалізацію і розв'язання їх за допомогою загальних моделей та математичних методів евклідової комбінаторної оптимізації. Комбінаторні задачі геометричного проектування мають ряд специфічних властивостей, аналіз і використання яких дозволяє розробляти ефективні методи їх розв'язання. Вивчення таких задач відбувається по двох взаємопов'язаних напрямах.

По-перше, це створення формального математичного апарату евклідових комбінаторних задач геометричного проектування на основі теорії евклідових комбінаторних множин, комбінаторних многогранників, властивостей різних класів цільових функцій на цих множинах та виявлення властивостей задач на основі єдиного підходу до їх дослідження.

По-друге, це розробка методів розв'язання евклідових комбінаторних задач геометричного проектування з урахуванням специфіки кожної задачі. Дисертація є узагальненням і подальшим розвитком результатів в області теорії геометричного проектування, а саме - комбінаторних задач, що там виникають, засновником якої є член-кор. НАН України Стоян Ю.Г.

Робота виконувалась на кафедрі прикладної математики Харківського інституту радіоелектроніки (ХІРЕ) згідно з індивідуальним планом докторантської підготовки та угодою про науково-технічне співробітництво ХІРЕ й Інституту проблем машинобудування АН України №805 від 12.10.87 р. у відповідності до науково-дослідних робіт за програмою АН України 1.12.5 (1990-1993рр.) "Проблеми автоматизації проектування технічних систем" по д/б темі "Математичне моделювання складних технічних систем модульного типу", що виконується за рішенням Президії АН України від 8.1.90, протокол №1, §3 (ДР№01900009448); за програмою Фонду фундаментальних досліджень КМ України 1/304, (1992-1993рр., шифр "Конвалія") "Створення і впровадження нових методів спільного перетворення складної аналітичної та геометричної інформації в математичному і комп'ютерному моделюванні" (д/б етапу "Дослідження алгебро-топологічних властивостей евклідових множин після їх занурення в арифметичний евклідовий простір" ДР№0192U031204); за планом НДР Полтавського технічного університета по д/б темі "Розробка теорії, моделей, методів та алгоритмів евклідової комбінаторної оптимізації" (1995-1996рр., ДР№0196U006063).

Ступінь дослідження матеріалу. В роботах Ю.Г. Стояна закладені основи теорії евклідових комбінаторних множин. В працях Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева та їх учнів започаткована теорія оцінки мінімумів та одержання достатніх умов мінімумів для опуклих функцій на евклідових комбінаторних множинах, а також розглянуто застосування до різних задач геометричного проектування.

М е т а р о б о т и. Систематичне вивчення евклідових комбінаторних задач оптимізації, грунтуючись на проведенні досліджень по теорії евклідових комбінаторних множин і многогранників; знаходження і обгрунтування екстремальних властивостей цих задач; побудові на цій основі теорії та математичних методів розв'язання евклідових комбінаторних задач різних класів; застосуванні результатів в геометричному проектуванні.

О с н о в н і з а в д а н н я р о б о т и:
1) дослідження властивостей евклідових комбінаторних множин переставлень і поліпереставлень, загальної множини розміщень, множини сполучень з повтореннями; 2) класифікація евклідових комбінаторних задач оптимізації; дослідження властивостей лінійних задач оптимізації на евклідових комбінаторних множинах, побудова методів і алгоритмів їх розв'язку; 3) дослідження нелінійних, в тому числі опуклих, цільових функцій та задач оптимізації з такими функціями на евклідових комбінаторних множинах; 4) застосування одержаних властивостей, методів і алгоритмів до розв'язування деяких евклідових комбінаторних задач геометричного проектування.

М е т о д и к а д о с л і д ж е н н я. Використані результати, методика та підходи, що склалися в рамках теорій геометричного проектування, математичного програмування, поліедральної комбінаторіки та математичної кібернетики.

Д о с т о в і р н і с т ь всіх матеріалів дисертації підтверджується коректністю математичних доведень всіх тверджень, збігом часткових та граничних випадків тверджень з раніше відомими.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Розроблена теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації, а саме:

Проведена класифікація евклідових комбінаторних задач оптимізації.

Досліджені евклідові комбінаторні множини, які утворюють припустимі області цих задач, та введені до розгляду комбінаторні многогранники. Отримано опис комбінаторних многогранників для загальних переставної та поліпереставної множин, множини сполучень з повтореннями, загальної множини розміщень у вигляді систем лінійних нерівностей. Одержано критерії вершини, грані будь-якої вимірності, суміжності вершин та граней, інші властивості опуклих оболонок евклідових комбінаторних множин, зокрема збіг множини вершин відповідних комбінаторних многогранників з загальними множинами переставлень та поліпереставлень.

Одержано розкладання евклідових комбінаторних множин по паралельних площинах та інших множинах. Вивчені властивості цих розкладень: потужність та склад множин, спосіб утворення тощо.

Сформульовані та доведені екстремальні властивості цільових функцій різних класів при оптимізації їх на евклідових комбінаторних множинах. Розроблено методику одержання розв'язку задачі оптимізації лінійної функції без додаткових обмежень, яку застосовано для отримання екстремалей у випадку множини сполучень з повтореннями, загальних множин поліпереставлень та розміщень.

Для евклідових комбінаторних множин запропоновано методики одержання оцінок мінімумів недиференційовних опуклих функцій і обґрунтування достатніх умов мінімуму. Ці оцінки і достатні умови виписані у випадку загальних множин розміщень та поліпереставлень, множини сполучень з повтореннями.

Запропоновано підходи до розв'язання лінійних задач на евклідових комбінаторних множинах з додатковими обмеженнями. В рамках цього підходу побудовано наближені розв'язки таких задач на загальній множині переставлень. Проілюстровано методику одержання у цьому випадку апріорної оцінки точності розв'язку.

Запропоновано і обгрунтовано метод розв'язку задач безумовної евклідової комбінаторної оптимізації на множинах, які збігаються з множинами вершин своєї опуклої оболонки (поліпереставної, переставної множин тощо), задач безумовної оптимізації угнутих функцій на довільних евклідових комбінаторних множинах.

Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації застосовані до розв'язання ряду задач геометричного проектування.

Т е о р е т и ч н а ц і н н і с т ь розробленої теорії евклідових комбінаторних множин та їх опуклих оболонок полягає в створенні апарату математичного моделювання у вигляді е-задач та обгрунтуванні теоретичних підвалин ефективних методів їх розв'язування. Розкладання евклідових комбінаторних множин та їх властивості цінні як теоретичне підгрунтя декомпозиційних методів розв'язку е-задач. Теоретичне значення екстремальних властивостей досліджених класів цільових функцій - в одержанні необхідних, а також достатніх умов їх мінімумів на е-множинах.

П р а к т и ч н у ц і н н і с т ь мають: математична модель оптимізаційних комбінаторних задач геометричного проектування у вигляді е-задачі, класифікація е-задач оптимізації, що може бути використане як загальна схема для постановки задач, вибору методів їх розв'язування. Для розв'язування задач розміщення об'єктів практичну цінність мають методи наближеного розв'язку задач на евклідових комбінаторних множинах. Точні методи розв'язання лінійних та нелінійних задач безумовних е-задач цінні як інструмент розв'язання практичних задач з різних галузей, математичні моделі яких можуть бути побудовані на основі розробленої теорії. Розроблена теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації є основою для практичної побудови математичних моделей, математичного і програмного забезпечення при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації.

Рівень реалізації і впровадження. Матеріали дисертації застосовуються в навчальному процесі Полтавського технічного університету та використовані при виконанні д/б теми "Розробка теорії, моделей, методів та алгоритмів евклідової комбінаторної оптимізації", ДРж0196U006063.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідалися, зокрема, на: наукових конференціях професорів, викладачів, наукових співробітників, аспірантів і студентів Полтавського інженерно-будівельного інституту (Полтавського технічного університету) (Полтава, 1986-1996); всесоюзній науковій конференції "Математичне забезпечення раціонального розкрою в системах автоматизованого проектування" (Уфа, 1987); всесоюзній конференції "Математичне та імітаційне моделювання в системах проектування і керування" (Чернігів, 1990); XI всесоюзній школі "Системи програмного забезпечення розв'язання задач оптимального планування" (Кострома, 1990); XII конференції "Системи програмного забезпечення розв'язання економічних задач" (Нарва-Ииессу, 1992); Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів, 1995); П'ятій міжнародній науковій конференції ім. ак. М.Кравчука (Київ, 1996р.), семінарі "Математичні методи геометричного проектування" при Науковій раді АН України по проблемі "Кібернетика" (Харків,1987,1992-1995), інших.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 59 праць, в тому числі учбовий посібник, а також в співавторстві зі Ю.Г.Стояном - монографія.

Особистий внесок. Всі основні результати, що викладені в дисертації та виносяться на захист, одержані автором особисто і надруковані в працях без співавторів. В працях, що опубліковані у співавторстві, такі матеріали дисертації одержані особисто автором. В [1] автору дисертації належать такі матеріали, вперше опубліковані в цій монографії: означення евклідових комбінаторних множин на основі поняття мультимножини; доведення теорем 2.13, 2.14; формулювання і доведення леми 2.26, теореми 2.27; всі результати пункту 2.4 "Властивості множини сполучень з повтореннями", що не друкувалися раніше; обгрунтування теореми 3.1; теорема 3.3 і її доведення; формулювання і доведення теореми 3.6; доведення леми 3.29 та теорем 3.31, 3.33, 3.37; лема 3.40, наслідки 3.41 -3.43 (обгрунтування); лема 3.44; теорема 3.45; формулювання і обгрунтування теореми 3.46; доведення теореми 3.47; формулювання і доведення леми 3.48, теорем 3.49, 3.50; доведення теореми 3.51, леми 3.52; розв'язання задачі знаходження (3.159) при E=E(G,H); теорема 3.53; доведення теореми 3.54; лема 3.55; теореми 3.56, 3.57; доведення теореми 3.60.

В [3] автору дисертації належить побудова математичних моделей задач, що розглядаються, а також викладений метод їх розв'язання і його обгрунтування, проведені чисельні експерименти. В [12] - ідея застосування до викладеної математичної моделі методу віток та меж, а також поширення на переставну множину методології одержання оцінки та достатньої умови мінімуму опуклої недиференційовної функції, застосування їх при побудові алгоритму методу. В [14] - всі результати, що відносяться до загальної множини розміщень та її опуклої оболонки.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, семи розділів, висновку, додатку - 221 сторінка машинописного тексту, списку літератури з 178 найменувань, 4 табл., II рис., всього - 242 сторінки.

2. ЗМІСТ РОБОТИ

<u>У першому розділі</u> здійснена постановка основної задачі оптимізації на комбінаторній множині, наведено означення евклідових комбінаторних множин та їх конкретних реалізацій. Нехай Q - комбінаторна множина, q - елемент з Q, а $|Q|$ - кількість елементів Q, F - функціонал на множині Q. Основною задачею комбінаторної оптимізації назвемо задачу знаходження екстремуму і екстремалі

$$F(q^*) = \underset{q\in Q}{\mathrm{extr}} F(q) \qquad q^* = \arg \underset{q\in Q}{\mathrm{extr}}\, F(q). \qquad (1)$$

Розв'язком задачі (1) назвемо пару $\langle F(q^*), q^*\rangle$.

Позначимо $J_n = \{1,\dots,n\}$, нехай $J_n^0 = J_n \cup \{0\}$, $J_0 = \varnothing$. Нехай k, n, η - натуральні константи, g_j, e_i - дійсні числа $\forall j\in J_\eta$, $\forall i\in J_n$, а $G=\{g_1,\dots,g_\eta\}$ - мультимножина з основою $S(G)=\{e_1,\dots,e_n\}$, первинною специфікацією $[G]=\{\eta_1,\dots,\eta_n\}$, $\eta_i \geq 1$ $\forall i\in J_n$, $\eta_1+\dots+\eta_n=\eta$, $\eta\geq k$. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $\eta_i \leq k$ $\forall i\in J_n$. Зазначимо, що по означенню основи мультимножини $e_i \neq e_j$ $\forall i\neq j$, $i,j\in J_n$ та $n<\eta<nk$. Розглянемо упорядковану k-вибірку

$$e = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}) \qquad (2)$$

з G, де $g_{i_j}\in G$, $i_j \neq i_t$ $\forall i_j, i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$. Множина E, елементами якої є k-вибірки $\bar{e}=(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k)$, $\bar{\bar{e}}=(\bar{\bar{e}}_1, \dots, \bar{\bar{e}}_k)$ вигляду (2) з G, називається евклідовою комбінаторною множиною, якщо з умови $\exists j\in J_k$: $\bar{e}_j \neq \bar{\bar{e}}_j$, випливає $\bar{e}\neq\bar{\bar{e}}$. Для стислості викладу будемо далі називати евклідову комбінаторну множину е-комбінаторною множиною або просто е-множиною.

Множина переставлень без повторення з k різних дійсних чисел - це множина упорядкованих k-вибірок вигляду (2) з G при умові, що $\eta=n=k$. Позначимо її $P_k(G)$. Множина переставлень з повтореннями з k дійсних чисел, з яких n різні - це множина упорядкованих k-вибірок вигляду (2) з G при умові, що $k=\eta$. Позначимо цю сукупність $P_{kn}(G)$. $P_{kk}(G)=P_k(G)$, тому множину $P_{kn}(G)$ назвемо загальною множиною переставлень. Розглянемо упорядковане розбиття множини J_k на s множин $K_1, \ldots, K_s$, які задовольняють умови $K_i \cap K_j=\emptyset$, $K_i \neq \emptyset$, $\forall i,j \in J_s$. Позначимо через H множину елементів вигляду $\pi=(\pi(1),\ldots,\pi(k))=(\pi^1,\ldots,\pi^s)$, де π^i $\forall i \in J_s$ - довільне переставлення елементів множини K_i. Нехай $\eta=k$, $G=\{g_1,\ldots,g_\eta\}$. Множину $P^s_{kn}(G,H)=\{(g_{\pi(1)},\ldots,g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in H\}$ назвемо загальною поліпереставною множиною. Елементи цієї множини назвемо поліпереставленнями (з повтореннями). Поряд з позначенням $P^s_{kn}(G,H)$ будемо використовувати також $P(G,H)$. Множина k-розміщень без повторення з n різних дійсних чисел - це множина упорядкованих k-вибірок вигляду (2) з G, коли $[G]=\{1^n\}$, (тобто G - множина) та $\eta=n$, $G=S(G)$. Позначимо цю множину розміщень $A^k_n(G)$. Множина k-розміщень з повтореннями з n різних дійсних чисел - це множина упорядкованих k-вибірок вигляду (2) з G, коли $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$, $S(G)=\{e_1,\ldots,e_n\}$, $[G]=\{k^n\}$, тобто $\eta=nk$. Позначимо цю множину $\bar{A}^k_n(G)$. Нехай $G=\{g_1,\ldots,g_\eta\}$, $S(G)=\{e_1,\ldots,e_n\}$, $[G]=\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$, де $\eta_i<k$ $\forall i \in J_n$. Сукупність усіх упорядкованих k-вибірок вигляду (2) з G назвемо загальною множиною k-розміщень і позначимо $A^k_{\eta n}(G)$. Оскільки елементи $[G]$ задовольняють умови $\eta_i<k$ $\forall i \in J_n$, то в кожному елементі $A^k_{\eta n}(G)$ не більше η_i елементів $e_i \in S(G)$. Якщо ж $\eta_i < k$ $\forall i \in J_n$, в жодному елементі $A^k_{\eta n}(G)$ не має k однакових чисел e_i, $i \in J_n$ (на відміну від $\bar{A}^k_n(G)$, де є n елементів, що складаються з однакових чисел e_i, $i \in J_n$). При $n=\eta$, тобто при $\eta_i=1$ $\forall i \in J_n$ $A^k_{\eta n}(G)=A^k_n(G)$, а при $\eta_i=k$ $\forall i \in J_n$ $A^k_{(kn)n}(G)=\bar{A}^k_n(G)$. Цим пояснюється наявність слова "загальна" в назві $A^k_{\eta n}(G)$. Розглянемо множину

k-сполучень з повтореннями з n різних дійсних чисел, якщо $G=\{g_1,\dots,g_n\}$, $S(G)=\{e_1,\dots,e_n\}$, $[G]=\{k^n\}$. Елементами множини k-сполучень з повтореннями є всі k-вибірки з G вигляду

$$e=(g_{i_1},g_{i_2},\dots,g_{i_k}), \qquad (3)$$

де $g_{i_j}\in G$, $i_j\neq i_t$ $\forall i_j,i_t\in J_n$ $\forall j,t\in J_k$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що для будь-якого елементу e вигляду (3) з множини k-сполучень з повтореннями виконуються нерівності

$$g_{i_1}\leq g_{i_2}\leq\dots\leq g_{i_k}. \qquad (4)$$

Множина всіх підпорядкованих умові (4) k-вибірок e вигляду (3) задовольняє означення e-множини. Позначимо її $C_n^k(G)$.

Нехай E – евклідова комбінаторна множина, а e в зображенні (2) – елемент E. Тоді відображення $f:E\to E_f\subset R^k$ називають зануренням E в арифметичний евклідовий простір, якщо f ставить E у взаємно однозначну відповідність множині E_f за таким правилом: для $e=(g_{i_1},\dots,g_{i_k})\in E$, $x=f(e)$, $x=(x_1,\dots,x_k)\in E_f$ маємо $x_j=g_{i_j}$ $\forall j\in J_k$. Зауважимо, що E також є e-множиною. Поряд з відображенням f розглянемо також відображення f_N, що переводить E в $E_{f_N}\subset R^k$ за правилом: для $e=(g_{i_1},\dots,g_{i_k})\in E$, $x=f_N(e)$, $x=(x_1,\dots,x_k)$ маємо $x_j=i_j$ $\forall j\in J_k$. При необхідності одночасно розглядати множини E_f та E_{f_N} будемо використовувати позначення E_φ. Образи e-множин після їх занурення в R^k позначимо так: $E_k(G)=f(P_k(G))$, $E_{kn}(G)=f(P_{kn}(G))$, $\bar{E}_n^k(G)=f(\bar{A}_n^k(G))$, $E_n^k(G)=f(A_n^k(G))$, $E_{kn}^s(G,H)=f(P_{kn}^s(G,H))$, $E_{\eta n}^k(G)=f(A_{\eta n}^k(G))$, $S_n^k(G)=f(C_n^k(G))$.

Введення поняття e-множини дозволяє виділити з множини задач, що описуються задачею (1), ті, в яких як Q розглядаються e-множини E (або їх підмножини). А саме, визначити

$$F(g^*)=\operatorname*{extr}_{g\in E}F(g); \qquad g^*=\arg\operatorname*{extr}_{g\in E}F(g). \qquad (5)$$

Введення відображень f та f_N дає можливість замінити розв'язок задачі (5) розв'язком такої задачі: знайти

$$\Phi(x^*) = \operatorname*{extr}_{x\in E_\varphi} \Phi(x); \qquad x^* = \arg \operatorname*{extr}_{x\in E_\varphi} \Phi(x), \qquad (6)$$

де $\Phi(x)$ – функція k змінних, що означена на E_φ, $\Phi: E_\varphi \to R^1$, яка відповідає функціоналу $F(g)$, $g\in E$. Під відповідністю функції $\Phi(x)$ функціоналу $F(g)$, $g\in E$, $x=\varphi(g)$ розуміється: $F(g)=\Phi(\varphi(g))$ $\forall g\in E$. Тут φ – це f або f_N. Функція $\Phi(x)$ може бути означена на $E_\phi \supseteq E_\varphi$, $E_\phi \subset R^k$. Якщо в задачі (6) функція $\Phi(x)$ задана у вигляді єдиного аналітичного виразу, то природно вважати, що E_ϕ – область означення цього виразу при $x\in R^k$ або її частина.

Означення. Задачу (6) назвемо евклідовою задачею комбінаторної оптимізації або коротко е-задачею.

Часто буває зручно задачу (6) зображати в такому вигляді: знайти $\Phi(x^*)=\operatorname*{extr}_{x\in E_\psi} \Phi(x)$; $x^*=\arg \operatorname*{extr}_{x\in E_\psi} \Phi(x)$ при обмеженнях

$$\psi^i(x) \leq 0 \quad \forall i\in J_r; \qquad \psi^{r+i}(x) = 0 \quad \forall i\in J_s; \qquad (7)$$

де r,s – цілі невід'ємні константи, $J_0 = \emptyset$, а $E_\psi \subset R^k$, $\psi^i: E_\psi \to R^1$ $\forall i\in J_{r+s}$ такі, що $E_\varphi=\{x \mid x\in E_\psi,\ \psi^i(x)\leq 0\ \forall i\in J_r;\ \psi^{i+r}(x)=0\ \forall i\in J_s\}$.

Іноді зручно наступне зображення задачі (6): знайти

$$H(y^*) = \operatorname*{extr}_{x\in E_\varphi} H(y); \qquad y^* = \arg \operatorname*{extr}_{x\in E_\varphi} H(y) \qquad (8)$$

при обмеженнях

$$\varphi^i(y) \leq 0 \quad \forall i\in J_r; \qquad \varphi^{r+i}(y) = 0 \quad \forall i\in J_s; \qquad (9)$$

де $x=(x_1,\dots,x_k)$, $y=(x_1,\dots,x_k, y_{k+1},\dots,y_m)\in R^m$, m – натуральна стала ($m\geq k$), а $H(y)$, $\varphi^i(y)$ $\forall i\in J_{r+s}$ – функції m змінних. Обмеження (7), (9) назвемо додатковими для е-задачі. Е-задачу в зображенні (8)-(9) при $m=k$ назвемо повністю комбінаторною, а при $m>k$ – частково комбінаторною. Змінні $y_{k+1}, \dots, y_m$ назвемо неперервними, а $x_1,\dots,x_k$ – комбінаторними. Якщо $r+s=0$, , то (8)-(9) назвемо евклідовою безумовною задачею комбінаторної оптимізації, у противному разі – умовною е-задачею. Якщо функції $H(y)$, $\varphi^i(y)$ $\forall i\in J_{r+s}$

лінійні, то (8)-(9) назвемо лінійною е-задачею. Аналогічно по вигляду цільової функції і (або) вигляду додаткових обмежень будемо називати е-задачу (8)-(9) відповідно е-задачею опуклої, угнутої, недиференційовної оптимізації тощо.

Е-задачі (8)-(9) - частковий випадок такої е-задачі: знайти

$$H(y^*) = \operatorname*{extr}_{y\in Y} H(y) = \operatorname*{extr}_{x\in E_\varphi, z\in Z} H(x,z), \qquad (10)$$

$$y^* = \arg \operatorname*{extr}_{y\in Y} H(y) = \arg \operatorname*{extr}_{x\in E_\varphi, z\in Z} H(x,z), \qquad (11)$$

де $Y=E_\varphi \times Z$, $Y\subset R^m$, $E_\varphi \subset R^k$, $Z\subset R^t$, $t+k=m$, $m>k$.

Велика кількість задач оптимізації в геометричному проектуванні зводиться до задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Як відомо з праць Ю.Г. Стояна, основною задачею геометричного проектування називається знаходження такого значення змінної інформації $u^*\in U$ та відповідного для u^* просторового образу S^*, що індукується в просторі R^k інформацією $g^*=P(g(u^*))$, щоб заданий функціонал $\varkappa(w)$ на області допустимих розв'язків $W\subset X$ досягав екстремуму, тобто $\varkappa(w^*) = \operatorname*{extr}_{w\in W\subset X} \varkappa(w) = \operatorname*{extr}_{\substack{\xi\in\Xi\subset H_\xi \\ u\in U\subset H_u}} \varkappa(\xi,u)$.

Основна задача геометричного проектування у вигляді (10), (11) називається основною задачею евклідової комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні. Задачі (10), (11) можуть розглядатися окремо.

<u>У другому розділі</u> розглядаються основні властивості евклідових комбінаторних множин переставлень і поліпереставлень та відповідних комбінаторних многогранників.

За означенням $P_{kn}(G)$ в точках $x\in E_{kn}(G)$ справедлива рівність

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} g_i . \qquad (12)$$

Не порушуючи загальності, можна вважати, що елементи мультимножини G упорядковані так: $g_i < g_{i+1} \quad \forall i\in J_{k-1}$. Розглянемо многогранник $\Pi_{kn}(G)$, що означається системою нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} x_j \le \sum_{j=1}^{k} g_j; \\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{i} g_j; \quad \alpha_j \in J_k,\ \alpha_j \ne \alpha_r\ \forall j \ne r,\ j,r \in J_i\ \forall i \in J_k. \end{cases} \tag{13}$$

Теорема 2.4. $E_{kn}(G)=V_k$, де V_k – множина вершин $\Pi_{kn}(G)$.

Назвемо $\Pi_{kn}(G)$ загальним переставним многогранником. Окремі випадки $\Pi_{kn}(G)$ розглядалися різними авторами раніше. Так, вивчався випадок, коли G – множина невід'ємних чисел $g_1>\ldots>g_k\ge 0$ (многогранник $\Pi_k^+(G)$), коли G – множина, а обмеження $g_k\ge 0$ відсутнє. Тобто, розглядалися випадки опуклої оболонки $\Pi_k(G)$ множини $E_k(G)=f(P_k(G))$. Досліджувалася множина $P_k(G)$ і її опукла оболонка $\Pi_k(G)$, де G – множина цілих чисел. Розглянемо властивості $\Pi_{kn}(G)$, почавши з опису m-граней цього многогранника, $m\in J^0_{k-2}$.

Теорема 2.5. Нехай $G=\{g_1,\ldots,g_n\}$, $S(G)=\{e_1,\ldots,e_n\}$, $[G]=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$; $e_1>\ldots>e_n$; $g_1\ge\ldots\ge g_n$; $k_0=0$, $k_1=\eta_1$, $k_2=\eta_1+\eta_2,\ldots,k_n=\eta_1+\ldots+\eta_n=n$.

а) Нехай F – m-грань многогранника $\Pi_{kn}(G)$, що означається системою

$$\begin{cases} \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall\omega\subset J_k; & (14) \\ \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} g_i. & (15) \end{cases}$$

Тоді існують такі підмножини $\omega_1\subset\ldots\subset\omega_{k-m}=J_k$, для яких нерівності (14) перетворюються в рівності при будь-якому $x\in F$. При цьому F – множина розв'язків системи, одержаної з (14), (15) заміною в (14) нерівностей рівностями для $\omega=\omega_\sigma$ при $\sigma\in J_{k-m-1}$.

б) Якщо для підмножин $\omega_1\subset\ldots\subset\omega_\lambda=J_k$ нерівності в (14), (15) замінити рівностями, то множина F розв'язків отриманої системи є m-гранню $\Pi_{kn}(G)$: $m = \dim F=k-(\lambda+\sum(|\omega_\sigma|-|\omega_{\sigma-1}|-1))$ і підсумовування проводиться по всіх індексах $\sigma\in J_\lambda$, для кожного з яких знайдеться таке $j\in J_n$, $k_{j-1}<|\omega_{\sigma-1}|$ та $|\omega_\sigma|\le k_j$ (вважаємо, що

$|\omega_0|=0)$.

З теореми 2.5 випливає, що множина розв'язків системи $\sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \ \forall\omega\subset J_k$; $\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} g_i$, є i-гранню, $i\in J_{k-2}^0$, $\Pi_k^+(G)$, $G=(g_1,\dots,g_n)$, в тому і тільки в тому випадку, коли кожний з цих розв'язків перетворює в рівності нерівності системи лише для підмножин $\omega_1, \omega_2,\dots,\omega_{k-i-1}$, що мають властивість

$$\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega_{k-i-1} \subset J_k. \qquad (16)$$

Ще один наслідок з теореми 2.5 полягає в тому, що якщо $x=(x_1, \dots, x_k)$ - вершина $\Pi_{kn}(G)$, то справедливо

$$\{\alpha_1^1\}\subset\{\alpha_1^2,\alpha_2^2\} \subset\dots\subset \{\alpha_1^{k-1},\dots,\alpha_{k-1}^{k-1}\} \subset \{\alpha_1^k,\dots,\alpha_k^k\}=J_k, \qquad (17)$$

$$\sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} g_t \quad \forall i\in J_k. \qquad (18)$$

І навпаки, якщо виконуються (17), (18), то x - вершина $\Pi_{kn}(G)$.

<u>Теорема 2.8.</u> Вершинами $\Pi_{kn}(G)$, суміжними з вершиною $g=(g_{\alpha_1},\dots,g_{\alpha_k})$, є усякі вершини, які одержані з g переставленням компонент, рівних e_i, e_{i+1} $\forall i\in J_{n-1}$, і тільки вони.

<u>Теорема 2.11.</u> Множина $E_{kn}(G)$ симетрична відносно до всякої $(k-2)$-площини, яка описується системою рівнянь (12) та $x_i-x_j=0$, $i\ne j$ $i,j\in J_k$.

<u>Означення.</u> Назвемо дві i-грані S_1^i, S_2^i $(k-1)$-многогранника M суміжними, якщо вони перерізаються по $(i-1)$-грані S^{i-1} цього многогранника, тобто

$$S_1^i \cap S_2^i = S^{i-1}, \quad i \in J_{k-2}. \qquad (19)$$

Нехай є дві i-грані S_1^i та S_2^i, $i\in J_{k-2}$ $\Pi_k^+(G)$. Тоді за наслідком з теореми 2.5 існує $\Omega_1^i=\{\omega_j^1\}_{j=1}^{k-i-1}$ для S_1^i та $\Omega_2^i=\{\omega_j^2\}_{j=1}^{k-i-1}$ для S_2^i. Ці множини задовольняють умову (16).

$$\Omega^{i-1} = \Omega_1^i \cup \Omega_2^i. \qquad (20)$$

<u>Теорема 2.12.</u> Для того, щоб дві i-грані S_1^i та S_2^i многогранника $\Pi_k^+(G)$ були суміжними, необхідно і достатньо, щоб множина Ω^{i-1} в зображенні (20) визначала $(i-1)$-грань S^{i-1}, $i\in J_{k-2}$.

<u>Теорема 2.14.</u> Кожна нерівність системи (13) для $\Pi_k(G)$ породжує множину $D_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)$, що містить не більше $\binom{k}{i}$ паралельних між собою (k-2)-площин, які означаються системою рівнянь, що складається з (12) і рівняння

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{i} g_{\beta_j} \quad , \qquad (21)$$

де $\alpha_j, \beta_j \in J_k$, $\alpha_t \neq \alpha_j$, $\beta_t \neq \beta_j$ при $t \neq j$, $t, j \in J_i$, $i \in J_{k-1}$.

<u>Теорема 2.15.</u> Нехай $D = \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup_{\alpha} D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, де $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Тоді $|D| \leq \binom{2k}{k}/2 - 1$.

Назвемо (k-2)-площину (12), (20), з множини $D_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)$ (k-2)-площиною кратності x, якщо є рівно x i-вибірок з G, що породжує $E_k(G)$, таких, що суми елементів цих вибірок рівні між собою і дорівнюють $\sum_{j=1}^{i} g_{\beta_j}$.

<u>Теорема 2.16.</u> Сума кратностей (k-2)-площин вигляду (12), (21), що породжені: а) будь-якою нерівністю i-ї спілки нерівностей системи (13), дорівнює $\binom{k}{i}$, $i \in J_{k-1}$; б) усіма нерівностями i-ї спілки - $\binom{k}{i}^2$, $i \in J_{k-1}$; в) усіма нерівностями спілок i $\forall i \in J_{k-1}$ - $|D^*|$, що обчислюється за формулою $|D^*| = \binom{2k}{k}/2 - 1$.

<u>Теорема 2.17.</u> Кожна (k-2)-площина $H^i_j \in D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ кратності x^i_j містить точно $(k-i)!\,i!\,x^i_j$ точок множини E_k $\forall i \in J_{k-1}$ $\forall j \in J_t$, де $t = |D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)|$.

Позначимо $E(H^i_j) \subset E_k$ - підмножину тих точок з E_k, які лежать на (k-2)-площині H^i_j, $i \in J_{k-1}$, $j \in J_t$. Наступна теорема установлює розклад множини E_k по будь-якій сім'ї $\{H^i_j \ \forall j \in J_t\} = D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ паралельних (k-2)-площин H^i_j, $\forall i \in J_{k-1}$, $\forall j \in J_t$.

<u>Теорема 2.18.</u> $E_k = \bigcup_{j=1}^{t} E(H^i_j)$ $\forall i \in J_{k-1}$.

Розглянемо опуклу оболонку $E^s_{kn}(G,H)$ $\Pi^s_{kn}(G,H) = \mathrm{conv} E^s_{kn}(G,H)$. Далі будемо використовувати також позначення $E(G,H) = E^s_{kn}(G,H)$ та $\Pi(G,H) = \Pi^s_{kn}(G,H)$. Нехай $G^{K_i} \subset G$ - k_i-елементна мультимножина ($k_i = |K_i|$ $\forall i \in J_s$), що утворена елементами G $g_1^{K_i}, \ldots, g_{k_i}^{K_i}$ з номерами з множини K_i, $k_1+\ldots+k_s=k$. Упорядкуємо елементи G^{K_i}: $g_1^{K_i} \ge g_2^{K_i} \ge \ldots \ge g_{k_i}^{K_i}$. Покладемо $N_i'=\{(\sum_{j=1}^{i-1} k_j)+1, (\sum_{j=1}^{i-1} k_j)+2, \ldots, \sum_{j=1}^{i} k_j\}$ $\forall i \in J_s$.

Теорема 2.19. $\Pi(G,H)$ визначається системою

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in N_i'} x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} g_j^{K_i} \quad \forall i \in J_s ; \\ \\ \sum\limits_{j \in \omega^i} x_j \le \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{K_i} \quad \forall \omega^i \subset N_i' \quad \forall i \in J_s . \end{cases} \qquad (22)$$

Назвемо спілкою $(i,|\omega^i|)$ нерівностей системи (22) сукупність нерівностей цієї системи з фіксованими значеннями пари чисел $i,|\omega^i|$ $\forall \omega^i \subset N_i'$ $\forall i \in J_s$. Нехай $G^{K_i}=\{g_1^{K_i},\ldots,g_{k_i}^{K_i}\}$, $S(G^{K_i})=\{e_1^i,\ldots,e_{n_i}^i\}$, $[G^{K_i}]=\{p_1^i,\ldots,p_{n_i}^i\}$, $p_1^i+\ldots+p_{n_i}^i=k_i$. $\Pi(G,H)$ назвемо загальним поліпереставним многогранником. Нехай M_i є d_i-вимірним многогранником $\forall i \in J_s$. Під добутком $M_1,\ldots,M_s$ розуміють множину $\bullet_{i=1}^{s} M_i=\{x \in R^{d_1+\ldots+d_s} \mid x=(x_1,\ldots,x_s),\ x_i \in M_i\ \forall i \in J_s\}$. Позначимо n_i кількість елементів основи мультимножини $G^{K_i}=\{g_1^{K_i}, \ldots, g_{k_i}^{K_i}\}$.

Теорема 2.21. $\Pi(G,H) = \bullet_{i=1}^{s} \Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$.

Теорема 2.22. $E(G,H)$ збігається з множиною вершин $\Pi(G,H)$.

Теорема 2.23. Вершина $g(\pi) \in \mathrm{vert}\,\Pi(G,H)$ є суміжною до вершини $g(\sigma) \in \mathrm{vert}\,\Pi(G,H)$ тоді і тільки тоді, коли $g(\sigma)$ утворюється з $g(\pi)$ переставленням двох нерівних одна одній компонент - $g_j^{K_i}$ та $g_{j+1}^{K_i}$, $j \in J_{k_i-1}$, $i \in J_s$.

Твердження 2.24. Точки $E(G,H)$ належать $(k-2)$-сфері $W \subset R^k$, що описується системою з рівняння (12) і

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - t^*)^2 = r^2 , \qquad (23)$$

де t^*, r обчислюються за формулами $t^* = (g_1 + \ldots + g_k) / k$, $r^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(g_i - t^*\right)^2$ відповідно.

Теорема 2.25. Точки множини $E(G,H)$ лежать на еліптичному циліндрі з $(k-2)$-основою, який задається рівнянням

$$\sum_{j\in N_i'}(x_j - t_i^*)^2 = r_i^2\ ,\ i\in J_s, \qquad (24)$$

де $t_i^* = \left(\sum_{j=1}^{k_i} g_j^{K_i}\right) / k_i$; $\quad r_i = \left(\sum_{j=1}^{k_i}(g_j^{K_i} - t_i^*)^2\right)^{1/2}$.

Теорема 2.27. Точки $E(G,H)$ і тільки вони задовольняють системи обмежень: (22)-(23); (22) та s рівнянь $(\forall i\in J_s)$ (24).

Теорема 2.28. Нехай $G^{K_i}=\{g_1^{K_i}, \ldots, g_{k_i}^{K_i}\}$, де $g_1^{K_i}\geq\ldots\geq g_k^{K_i}$, $\forall i\in J_s$, $S(G^{K_i})=\{e_1^i,\ldots,e_{n_i}^i\}$, де $e_1^i>\ldots>e_{n_i}^i$, $\forall i\in J_s$; $[G^{K_i}]=\{p_1^i,\ldots, p_{n_i}^i\}$, $p_1^i + \ldots + p_n^i = k_i$, $\forall i\in J_s$; $k_0^i=0$, $k_1^i = p_1^i$, $k_2^i = p_1^i + p_2^i,\ldots, k_{n_i}^i=p_1^i+\ldots+p_{n_i}^i=k_i$ $\forall i\in J_s$.

а) Нехай F – m-грань $\Pi(G,H)$. Тоді знайдуться такі підмножини $\emptyset=\omega_0^i\subset\omega_1^i\subset\ldots\subset\omega_{k_i-m_i}^i=N_i'$ $\forall i\in J_s$, $m_1+\ldots+m_s=m$, для яких нерівності з (22) перетворюються у рівності при будь-якому $x\in F$. При цьому F – множина розв'язків системи, одержаної з (22) заміною нерівностей рівностями для $\omega_{\sigma_i}^i$ $\forall\sigma_i\in J_{k_i-m_i}^0$ $\forall i\in J_s$.

б) Якщо для підмножин $\emptyset=\omega_0^i\subset\omega_1^i\subset\ldots\subset\omega_{q_i}^i=N_i'$ $\forall i\in J_s$ нерівності в (22) замінити рівностями, то множина F розв'язків одержаної системи є m-гранню $\Pi(G,H)$, де $m=m_1+\ldots+m_s$, а $m_i=k_i-\{q_i-\Sigma(|\omega_{\sigma_i}^i|-|\omega_{\sigma_i-1}^i|-1)\}$, і підсумовування провадиться по всіх індексах $\sigma_i\in J_{q_i}$, для кожного з яких знайдеться таке $j\in J_{n_i}$, що $k_{j-1}^i\leq|\omega_{\sigma_i-1}^i|$ та $|\omega_{\sigma_i}^i|\leq k_j^i$ (вважаємо, що $|\omega_0^i|=0$), $\forall i\in J_s$.

Теорема 2.29. Множина $E(G,H)$ симетрична відносно усякої гіперплощини з набору

$$x_j - x_m = 0,\ j\neq m\ \ \forall j,m\in\omega^i\subset N_i'\ \ \forall i\in J_s\ . \qquad (25)$$

Теорема 2.30. Множина $E(G,H)$ симетрична відносно всякої $(k-1-|\Omega|)$-площини, яка описується системою з $|\Omega|$ рівнянь: $\sum_{j\in N_i'} x_j = \sum_{j=1}^{k_i} g_j^{K_j}$ $\forall i\in\Omega\subset J_s$ і будь-якого з рівнянь набору (25).

<u>У третьому розділі</u> досліджені властивості загальної множини розміщень. Позначимо $\Pi^k_{nn}(G)=\operatorname{conv}E^k_{nn}(G)$ і назвемо загальним многогранником розміщень. Нехай елементи G упорядковані так:

$$g_1 \leq \ldots \leq g_n . \tag{26}$$

<u>Теорема 3.1.</u> $\Pi^k_{nn}(G)$ задається системою нерівностей

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leq \sum_{i\in\omega} x_i \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1} \quad \forall\omega\subset J_k. \tag{27}$$

<u>Теорема 3.3.</u> Точка $x\in\Pi^k_{nn}(G)$ - вершина $\Pi^k_{nn}(G)$ тоді і тільки тоді, коли її координати є переставленнями чисел $g_1, g_2, \ldots, g_s, g_{n-r+1}, g_{n-r+2}, \ldots, g_n$, де $r,s\in J^0_k$, $s+r=k$.

<u>Теорема 3.4.</u> Множина вершин $\Pi^{n-1}_{nn}(G)$ збігається з $E^{n-1}_{nn}(G)$

<u>Теорема 3.5.</u> Якщо $x\in R^k$ - вершина розміщень $\Pi^k_{nn}(G)$, то всі суміжні з нею вершини одержуються або переставленням в x компонент g_i, g_{i+1} ($g_i\neq g_{i+1}$, $i\in J_{s-1}$, $i\in J_{n-1}\setminus J_{n-r}$), або заміною компоненти g_s (g_{n-r+1}) на g_{n-r} (g_{s+1}), де відповідно $g_s\neq g_{n-r}$ ($g_{n-r+1}\neq g_{s+1}$), $r,s\in J^0_k$, $s+r=k$.

Кожна нерівність системи (27) породжує множину $D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$, яка містить не більше $\binom{n}{|\omega|}$ паралельних між собою гіперплощин вигляду

$$\sum_{i\in\omega} x_i = \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\beta_i} , \tag{28}$$

на яких лежать точки множини $E^k_{nn}(G)$, де $(x_1, \ldots, x_k)\in R^k$, $\beta_i\in J_n$, $\beta_i\neq\beta_j$ при $i\neq j$, $i,j\in J_{|\omega|}$, $\omega=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|}\}\subset J_k$.

Якщо $D=\bigcup_{|\omega|=1}^{k}\bigcup_{\omega} D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$, то $|D|\leq\sum_{|\omega|=1}^{k}\binom{k}{|\omega|}\binom{n}{|\omega|}$, де $\omega=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{|\omega|}\}\subset J_k$. Назвемо гіперплощину (28) з $D_{|\omega|}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{|\omega|})$ гіперплощиною кратності x, якщо існує рівно x $|\omega|$-вибірок з G (яка породжує $E^k_{nn}(G)$) таких, що суми компонентів цих вибірок рівні між собою і дорівнюють сумі $g_{\beta_1}+\ldots+g_{\beta_{|\omega|}}$. Сума кратностей гіперплощин вигляду (28), які породжені: а) будь-якою нерівністю (при $|\omega|=\mathrm{const}$) системи (27) дорівнює $\binom{n}{|\omega|}$; б) всіма нерівностями при одному і тому ж $|\omega|$ - $\binom{n}{|\omega|}\binom{k}{|\omega|}$; в) всіма нерівностями

$\sum\limits_{|\omega|=1}^{k} \binom{n}{|\omega|}\binom{k}{|\omega|}$. Якщо $t_j^{|\omega|}$ - кількість точок $E_{nn}^k(G)$, які належать гіперплощині $H_j^{|\omega|} \in D_{|\omega|}(\alpha_1,\dots,\alpha_{|\omega|})$ кратності $x_j^{|\omega|}$, то $t_j^{|\omega|} = x_j^{|\omega|}\,|\omega|!\,\frac{(n-|\omega|)!}{(n-k)!}$, $\forall \omega \subset J_k$, $\forall j \in J_t$, де $t = |D_{|\omega|}(\alpha_1,\dots,\alpha_{|\omega|})|$. Нехай $E(H_j^{|\omega|}) \subset E_{nn}^k(G)$ - підмножина тих точок з $E_{nn}^k(G)$, які лежать на гіперплощині $H_j^{|\omega|}$ будь-якої сім'ї $(H_j^{|\omega|}, \forall j \in J_t) = D_{|\omega|}(\alpha_1,\dots,\alpha_{|\omega|})$ паралельних гіперплощині $H_j^{|\omega|}$, $\omega \subset J_k$, $t = |D_{|\omega|}(\alpha_1,\dots,\alpha_{|\omega|})|$.

Теорема 3.6. $E_{nn}^k(G) = \bigcup\limits_{j=1}^{t} E(H_j^{|\omega|})$, $\forall \omega \subset J_k$.

Наслідок 3.7. Якщо $|\omega| = k$, то $E_{nn}^k(G) = \bigcup\limits_{j=1}^{t} E_{kq}(G')$, де $G' = \{g_1', \dots, g_k'\} \subset G$, а $q = |S(G')|$.

Розглянуті підходи до розкладення $E_{nn}^k(G)$ по множинах, які в об'єднанні дають $E_{nn}^k(G)$. Справедливе співвідношення: $E_{nn}^k(G) = \bigcup\limits_{\substack{i=0 \\ n_i^* \geq k}}^{\tau} (E^k_{n_i^* n_i^*}(G_i^*) \setminus \tilde{E}^k_{n_i^* n_i^*}(G_i^*))$, де G_i^* - мультимножина, $S(G_i^*) = \{e_{i+1}, \dots, e_{n-i}\}$, $[G_i^*] = \{\eta_{i+1}, \dots, \eta_{n-i}\}$, $\tau = [(n-1)/2]$, $[\cdot]$ - ціла частина числа, $n_i^* = |S(G_i^*)| = n-2i$, $n_i^* = |G_i^*| = \eta_{i+1} + \dots + \eta_{n-i}$, $\forall i \in J_\tau^0$; $\tilde{E}^k_{n_i^* n_i^*}(G_i^*)$ - підмножина множини $E^k_{n_i^* n_i^*}(G_i^*)$, кожний елемент якої не містить чисел, що дорівнюють e_{i+1}, e_{n-i}.

Теорема 3.8. $E_{nn}^k(G)$ симетрична відносно будь-якої гіперплощини вигляду $x_i - x_j = 0$, $i, j \in J_k$, $i \neq j$.

Теорема 3.9. Точки множини $E_{nn}^{n-1}(G)$ і тільки вони лежать на перерізі многогранника $\Pi_{nn}^{n-1}(G)$ і еліпсоїда

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j - \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right)\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1} g_i g_j = 0.$$

Четвертий розділ присвячено дослідженню властивостей множини сполучень. Нехай $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, $S(G) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $[G] = \{k^n\}$, тобто $\eta = nk$, $g_1 < \dots < g_n$, $e_1 < \dots < e_n$. Позначимо $\mathrm{conv} S_n^k(G) = \Pi_n^k(G)$ та назвемо многогранником сполучень з повтореннями.

Теорема 4.1. Точки $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{ik}) \in R^k$, де $y_{ij} = e_1$

$\forall j \in J_{k-i+1}$, $y_{i(j+k-i+1)}=e_n$ $\forall j \in J_{i-1}$, $\forall i \in J_{k+1}$, і тільки вони є вершинами многогранника, що описується системою

$$e_1 \le x_1, \quad x_i \le x_{i+1} \ \forall i \in J_{k-1}, \quad x_k \le e_n . \qquad (29)$$

Теорема 4.3. Точка $x=(x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ належить $Q_n^k(G)$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє систему (29).

Наслідок 4.4. Многогранник $Q_n^k(G)$ є k-симплексом, якщо $n>2$.

Досліджено деякі комбінаторно-топологічні властивості $Q_n^k(G)$.

Теорема 4.8. Множина точок $x=(x_1,\ldots,x_k) \in R^k$ є i-гранню $Q_n^k(G)$ тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком системи будь-яких $k-i$ рівнянь, $i \in J_{k-1}^0$, з набору:

$$x_1=e_1, \quad x_j=x_{j+1} \ \forall j \in J_{k-1}, \quad x_k=e_n . \qquad (30)$$

Згідно з критерієм i-грані $S^i \subset Q_n^k(G)$ (теорема 4.8), S^i є розв'язком системи з $k-i$ рівнянь набору (30) з номерами з множини $\Omega^i=\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-i}\}$, $\beta_j \in J_{k+1}$, $\beta_m \ne \beta_j$ при $m \ne j$; $m, j \in J_{k-1}^0$. Причому S^i взаємно однозначно визначається множиною Ω^i.

Теорема 4.18. Дві i-грані S_1^i, $S_2^i \subset Q_n^k(G)$ $(i \in J_{k-1})$ суміжні тоді і тільки тоді, коли існує $(i-1)$-грань $S^{i-1} \subset Q_n^k(G)$, така, що $\Omega_1^i \cup \Omega_2^i = \Omega^{i-1}$.

Теорема 4.24. Множина $S_n^k(G)$ лежить на сім'ї $\{H(i,j)\}_{j=1}^{j=\nu}$, $(i \in J_{k+1}$, $\nu=n$ при $i=1$, $i=k+1$; $\nu=0,5(n^2+n)$ при $i \in J_k \setminus \{1\})$ паралельних гіперплощин вигляду

$$\{H(1,j)\}_{j=1}^{j=n} = \{x \in R^k \mid x_k=e_j, \ j \in J_n\} ; \qquad (31)$$

$$\{H(k+1-\tau,j)\}_{j=1}^{j=0,5(n^2+n)} = \{x \in R^k \mid x_\tau - x_{\tau+1} = e_m - e_q, \quad m<q, \ m,q \in J_n\}, \ \tau \in J_{k-1} ; \qquad (32)$$

$$\{H(k+1,j)\}_{j=1}^{j=n} = \{x \in R^k \mid x_1 = g^j, \ j \in J_n\} . \qquad (33)$$

Якщо $e_m - e_q = e_i - e_j$, $m<q$, $i \le j$, $m \ne i$, $m,e,i,j \in J_n$, то дві відповідні гіперплощини (32) пристають. Назвемо гіперплощину $H(i,j)$ $i=k+1-\tau$, $\tau \in J_{k-1}$, будь-якої сім'ї (32) гіперплощиною кратності x, якщо $S(G)=\{e_1,\ldots,e_n\}$ така, що існує рівно x рівних різниць e_m-

$-e_q$, $m<q$, $m,q\in J_n$. Нехай $H(i,j)$ - гіперплощина з сімей (31)-(33). Якщо позначити $\{x\in(S_n^k(G)\cap H(i,j))\}=S_n^k(G,H(i,j))$, то з теореми 4.24 випливає: $S_n^k(G) = \bigcup\limits_{j=1}^{v} S_n^k(G,H(i,j))$ $\forall i\in J_{k+1}$, $v=n$ при $i=1$, $i=k+1$; $v=0,5(n^2+n)$ при $i\in J_k\setminus\{1\}$. Будемо розглядати $H(i,j)$ вигляду (32) кратності x також як x гіперплощин кратності 1, кожна з яких відповідає своїй парі чисел e_m, e_q. Якщо $H(i,j)$ - гіперплощина сім'ї (32) кратності 1, то $|S_n^k(G,H(i,j))|= \binom{m}{\tau-1}\binom{n-q+1}{k-\tau-1}$, де $k+1-\tau=i$. Якщо $H(i,j)=\{x\in R^k|x_\tau-x_{\tau+1}=e_\mu-e_\lambda,\ \mu<\lambda,\ \mu,\lambda\in J_n\}$, ($i=k+1-\tau$) сім'ї (32) має кратність x, то $|S_n^k(G,H(i,j))|=$ $=\sum\frac{(m+\tau-2)!(n-q+k-\tau-1)!}{(\tau-1)!(m-1)!(k-\tau-1)!(n-q)!}$, де підсумовування ведеться по тих x доданках, для яких $e_m-e_q=e_\mu-e_\lambda$, $m<q$; $m,q\in J_n$. Справедливо: $|S_n^k(G,H(1,j))|=\binom{j}{k-1}$; $|S_n^k(G,H(k+1,j))|=\binom{n-j+1}{k-1}$; $|S_n^k(G,H(1,j))|=$ $=|S_n^k(G,H(k+1,j))|$; $\forall j\in J_n$. Розглянуті і розкладання $S_n^k(G)$ по інших сім'ях паралельних площин, їх структура, опис і властивості.

<u>Теорема 4.33.</u> Точки $S_n^k(G)$ належать гіперграням набору вкладених і дотичних по k-1 гіпергранях многогранників $Q^k_{n_i^*}(G_i^*)$, $i\in J_\tau^0$, $n_i^*=n-2i$, $i\in J_\tau^0$, $G_0^*=G_0$; $G_i^*=\{g_{n_1+\ldots+n_i+1},\ldots,$ $g_{n-(n_n+\ldots+n_{n-i+1})}\}$, $i\in J_\tau$, $\tau=[0,5(n-1)]$, де $[\cdot]$ - ціла частина числа; тобто $S_n^k(G)\subset\bigcup\limits_{i=0}^{\tau} \mathrm{bd}\, Q^k_{n_i^*}(G_i^*)$.

Справедливо: $S_n^k(G)=\bigcup\limits_{i=0}^{\tau}\left[S^k_{n_i^*}(G_i^*)\setminus\tilde{S}^k_{n_i^*}(G_i^*)\right]$, $S_n^k(G)\subset\bigcup\limits_{i=0}^{\tau}\left[S^k_{n_i^*}(G_i^*,\right.$ $\left.H(1,\tau+1))\cup S^k_{n_i^*}(G_i^*,H(k+1,n-\tau))\right)\Big]$ де $\tilde{S}^k_{n_i^*}(G_i^*)$ - множина елементів з $S^k_{n_i^*}(G_i^*)$, кожний з яких не містить чисел, рівних e_{i+1}, e_{n-i}.

<u>В п'ятому розділі</u> на основі единої методології дається розв'язок лінійних безумовних е-задач для загальних множин поліпереставлень та розміщень, множини сполучень з повтореннями. Побудовані і обгрунтовані методи наближеного розв'язання лінійних

е-задач з додатковими лінійними обмеженнями. На прикладі розглянута методика одержання апріорної оцінки точності наближеного розв'язку. Нехай $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_k)\in E_k(J_k)$, таке, що

$$c_{\beta_1} \geq \ldots \geq c_{\beta_s} \geq 0 > c_{\beta_{s+1}} \geq \ldots \geq c_{\beta_k},\ s\in J_k^0, \quad (34)$$

<u>Теорема 5.3.</u> Мінімум функції

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \quad (35)$$

на $E_{nr}^k(G)$ досягається в точці $x^*=(x_1^*,\ldots,x_k^*)\in E_{nn}^k(G)$, де $x_{\beta_i}^*=g_i$ $\forall i\in J_s$; $x_{\beta_{s+i}}^*=g_{n-r+i}$ $\forall i\in J_r$, а $\beta\in E_k(J_k)$ та $s\in J_k^0$ задовольняють (34), елементи G - умову (26), r та s - умову

$$r + s = k;\ r,s\in J_k^0 . \quad (36)$$

<u>Теорема 5.6.</u> Для функції $\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$, $c_j\in R^1$ $\forall j\in J_k$, якщо стала $s\in J_k^0$ визначається системою нерівностей

$$\sum_{j=1}^{t} c_{s+1-j} \geq 0 \quad \forall t\in J_s;\ \sum_{j=1}^{t} c_{s+j} \leq 0 \quad \forall t\in J_{k-s}, \quad (37)$$

e_1 - найменший, а e_n - найбільший елемент $S(G)$, точка $x^*=(x_1^*, \ldots,x_k^*)$, де $x_i^*=e_1$ $\forall i\in J_s$; $x_i^*=e_n$ $\forall i\in J_k\setminus J_s$, є мінімаллю на $S_n^k(G)$.

Нехай $G^{K_i}\subset G$ - k_i-елементна мультимножина, утворена елементами $g_1^{K_i},\ldots,g_{k_i}^{K_i}$ з номерами з множини K_i, $k_1+\ldots+k_s=k$, $k_i=|K_i|$.

<u>Теорема 5.9.</u> Для функції $\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$, $c_j\in R^1$ $\forall j\in J_k$, якщо виконуються умови $c_{\alpha_1^q}\geq\ldots\geq c_{\alpha_{k_q}^q}$, $\forall q\in J_s$, $(\alpha_1^q,\ldots,\alpha_{k_q}^q)\in E_{k_q}(N_q')$, $k_1+\ldots+k_s=k$, елементи G^{K_q} упорядковані згідно нерівностей

$$g_1^{K_q} \leq g_2^{K_q} \leq \ldots \leq g_{k_q}^{K_q} \quad \forall q\in J_s , \quad (38)$$

N_q' обчислюється за формулою

$$N_i' = \{(\sum_{j=1}^{i-1} k_j) + 1, \ldots, \sum_{j=1}^{i} k_j\} \quad \forall i\in J_s , \quad (39)$$

точка $x^*=(x_1^*, \ldots,x_k^*)$, де $x_{\alpha_j^q}^* = g_j^{K_q}$, $\forall j\in J_{k_q}$, $\forall q\in J_s$, є мінімаллю на $E(G,H)$.

Як наслідки з теорем 5.3, 5.6, 5.9 одержані мінімалі $\Phi(x)$-

$= \sum_{j=1}^{k} c_j v(x_j)$ відповідно на $E^k_{m\bar{n}}(G)$, $S^k_{\bar{n}}(G)$, $E(G,H)$.

Розглянуто знаходження екстремалі лінійної е-задачі:

$$y^* = \arg\min_{y\in R^m} \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \tag{40}$$

при обмеженнях

$$x = (x_1, \ldots, x_k)\in E\subset R^k \tag{41}$$

та при додаткових обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq b_j \quad \forall j\in J_r ; \tag{42}$$

де $y=(y_1,\ldots,y_k, y_{k+1},\ldots,y_m)\in R^m$, $x_i=y_i$ $\forall i\in J_k$; m, r - натуральні числа, а a_{ij}, b_j, c_i - дійсні числа $\forall i\in J_m$, $\forall j\in J_r$, $m\geq k$.

Запропоновано метод наближеного розв'язування е-задачі (40)-(42), який складається з трьох етапів. Перший полягає в розв'язуванні задачі лінійного програмування (ЛП): знайти розв'язок $\tilde{y}$ задачі (40) при додаткових обмеженнях (42) та умові

$$x \in \operatorname{conv} E. \tag{43}$$

Перші k координат $\tilde{y}$ можуть не бути елементом E. Тому на другому етапі (назвемо його комбінаторним округленням) будуємо по $\tilde{y}$ точку $\tilde{y}^0\in R^m$, у якої перші k координат є елементом E. На третьому етапі формується $\tilde{y}^*\in R^m$, яка має ознаку точки $\tilde{y}^0$ та задовольняє (42), тобто наближений розв'язок задачі (40)-(42).

<u>Теорема 5.12.</u> Якщо викладеним триетапним методом здійснювати розв'язування задачі (40) при обмеженнях

$$x=(x_1, \ldots, x_k)\in E(G,H)\subset R^k , \tag{44}$$

та додаткових обмеженнях (42), які мають вигляд

$$\sum_{j\in\omega^i} x_j = \sum_{j\in\beta_t^i} g_j^{K_i}, \tag{45}$$

де $|\omega^i|=|\beta_t^i|$, $\beta_t^i\subset J_{k_i}$, $\omega^i\subset N_i'$, N_i' - задається (39), $i\in J_s$, $\forall t\in J_r$; або які одержуються з (45) заміною $\forall t\in J\subset J_r$ знаків = на знаки $\geq$, або $\leq$, а також якщо на першому етапі допоміжну задачу ЛП, яка одержується заміною обмеження (44) на $x\in\Pi(G,H)$, розв'язувати способом, що дає вершину $\tilde{y}$ допустимої області, і якщо $\tilde{y}$ існує, то вона дає точний розв'язок задачі (40), (42), (44).

Аналогічна теорема доведена для $E_{kn}(G)$. Розглянуто розв'язування лінійної e-задачі: знайти (40) при обмеженнях (44) і додаткових обмеженнях (42). А саме, визначити $x=(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})\in R^{k+1}$, на якій досягається

$$x^*_{k+1} = \arg\min_{x\in R^{k+1}} x_{k+1} \tag{46}$$

при обмеженнях (44) та при додаткових обмеженнях

$$\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} x_{\gamma_{im_i\lambda}+t} + d_{im_i} \le x_{k+1} \quad \forall i\in J_q, \tag{47}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{ij\lambda}} x_{\gamma_{ij\lambda}+t} \le c_{i(j+1)} - d_{ij},\ \forall j\in J_{m_i-1},\ \forall i\in J_q, \tag{48}$$

$$\gamma_{ij\lambda} = \sum_{t=1}^{i-1}\sum_{\kappa=1}^{m_t} K_{t\kappa\lambda} + \sum_{\kappa=1}^{j-1} K_{i\kappa\lambda}+1,\ \forall j\in J_{m_i},\ \forall i\in J_q\setminus\{1\},\ \forall\lambda\in J_s, \tag{49}$$

$$\gamma_{1j\lambda} = \sum_{\kappa=1}^{j-1} K_{1\kappa\lambda} + 1,\ \forall j\in J_{m_1}\setminus\{1\},\ \forall\lambda\in J_s, \tag{50}$$

$$\gamma_{11\lambda} = 1,\ \forall\lambda\in J_s. \tag{51}$$

Тут $K_{ij\lambda}\ge 1$, m_i, q, s, k – натуральні, а c_{ij}, d_{ij} – дійсні сталі $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i} K_{ij\lambda}=k_\lambda$, $\forall\lambda\in J_s$; $\sum_{\lambda=1}^{s} k_\lambda=k$; $c_{ij}\le d_{ij}$, $c_{i1}=0$, $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$.

$$g_1^{K_i} \le g_2^{K_i} \le \ldots \le g_{k_i}^{K_i}. \tag{52}$$

$$\begin{cases} \sum_{j\in N'_i} x_j = \sum_{j=1}^{k_i} g_j^{K_i} \quad \forall i\in J_s; & (53) \\ \sum_{j\in\omega^i} x_j \ge \sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{K_i} \quad \forall\omega^i\subset N'_i,\ \forall i\in J_s. & (54) \end{cases}$$

<u>Теорема 5.16.</u> Нехай $z=(z_1,\ldots,z_k,z_{k+1},\ldots,z_m)=(z_1^1,\ldots,z_{k_1}^1,\ldots,z_{k_1}^s,\ldots,z_{k_s}^s,z_{k+1},\ldots,z_m)\in R^m$, $m>k$, та $z_1^\lambda\le z_2^\lambda\le\ldots\le z_{k_\lambda}^\lambda$, $\forall\lambda\in J_s$. Тоді зі справедливості в z обмеження $\sum_{j=1}^{|\omega^\lambda|} z_j^\lambda \ge \sum_{j=1}^{|\omega^\lambda|} g_j^{K_j}$, $\omega^\lambda\subset N'_\lambda$, $\lambda\in J_s$, яке належить $(\lambda,|\omega^\lambda|)$-спілці системи (54), випливає справедливість в тій же точці z і решти обмежень з цієї ж $(\lambda,|\omega^\lambda|)$-спілки.

Комбінаторне (поліпереставне) округлення може бути таким (перший спосіб). Зафіксуємо λ, $\lambda \in J_s$. Викреслимо з набору $\widetilde{x}^{\lambda} = \{\tilde{x}_{\gamma_{11\lambda}}, \ldots, \tilde{x}_{\gamma_{11\lambda}+K_{11\lambda}-1}, \ldots, \tilde{x}_{\gamma_{qm_q\lambda}}, \ldots, \tilde{x}_{\gamma_{qm_q\lambda}+K_{qm_q\lambda}-1}\} = \{\widetilde{x}_1^{\lambda}, \ldots, \widetilde{x}_{k_\lambda}^{\lambda}\}$ частини координат $\hat{x}$ і (52) пару рівних чисел $\widetilde{x}_i^{\lambda} = g_j^{K_\lambda}$. Аналогічно діючи, формуємо координати $\{\tilde{x}^0_{\gamma_{11\lambda}}, \ldots, \tilde{x}^0_{\gamma_{11\lambda}+K_{11\lambda}-1}, \ldots, \tilde{x}^0_{\gamma_{qm_q\lambda}}, \ldots, \tilde{x}^0_{\gamma_{qm_q\lambda}+K_{qm_q\lambda}-1}\} = \{\widetilde{x}_1^{\lambda,0}, \ldots, \widetilde{x}_{k_\lambda}^{\lambda,0}\}$ точки $\tilde{x}^0$: $\widetilde{x}_i^{\lambda,0} = \widetilde{x}_i^{\lambda}$. Позначимо невикреслені числа набору $\widetilde{x}^{\lambda}$ так: $\widetilde{x}^{\lambda}_{\alpha_1} \leqslant \ldots \leqslant \widetilde{x}^{\lambda}_{\alpha_\varkappa}$, а числа, що залишилися, з (52) як: $g_{\beta_1}^{K_\lambda} \leqslant \ldots \leqslant g_{\beta_\varkappa}^{K_\lambda}$. Нехай $\widetilde{x}_{\alpha_i}^{\lambda,0} = g_{\beta_\varkappa}^{K_\lambda}$; $\alpha_i, \beta_i \in J_{k_\lambda}$, $\alpha_i \ne \alpha_j$, $\beta_i \ne \beta_j$, $\forall i \ne j$, $i, j \in J_\varkappa$. Так зчинимо для всіх $\lambda \in J_s$.

Аналогічно вводиться переставне округлення. Реалізація третього етапу описана в роботі. Видається за доцільне теоретично дати апріорну оцінку відносної точності розв'язку задачі (46) при обмеженнях (44), (47), (48). Нагадаємо, що x^*_{k+1} та $\tilde{x}^*_{k+1}$ – відповідно точний та наближений розв'язки цієї задачі. Оцінимо величину

$$\varepsilon_0 = (\tilde{x}^*_{k+1} - x^*_{k+1}) \,/\, x^*_{k+1}. \tag{55}$$

<u>Теорема 5.21.</u> Якщо задача знаходження (46) при обмеженнях (44), (47), (48) розв'язується описаним наближеним триетапним методом і на першому етапі використовується метод розв'язування задачі ЛП (46)-(48), (53), (54), який дає вершину допустимої області, а на другому етапі – перший спосіб поліпереставного округлення для формування точки $\tilde{x}^0$, то відносна точність ε_0 розв'язку, що визначається за формулою (55), задовольняє умову

$$\varepsilon_0 < \frac{2\sum\limits_{i=1}^{\gamma}(g_{k-i+1} - g_i) + \sum\limits_{i=\gamma+1}^{\Lambda}(g_{k-i+1} - g_i) - \sum\limits_{i=1}^{\theta}\Delta_{\alpha_i}}{\frac{1}{q}\left[\sum\limits_{i=1}^{k} g_i + \sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{m_i}(d_{ij} - c_{ij})\right]},$$

де $\gamma = \min(\tau, \delta^*)$, $\Lambda = \max(\tau, \delta^*) - \gamma$; $\tau = \begin{cases} m^* - s, & \text{якщо } m^* - \varkappa < s; \\ \varkappa, & \text{якщо } m^* - \varkappa \geqslant s, \end{cases}$

$m^* = \min(k, 2M)$; $\varkappa = \sum\limits_{\lambda=1}^{s} \max\limits_{i \in J_q} K_{im_i\lambda}$; $M = \sum\limits_{i=1}^{q} m_i$, $\delta^* = \min(m^*, s \max\limits_{i \in J_q}(m_i - 1))$;

$$\theta=\begin{cases} s\ , & \text{якщо } m^*\leqslant\varkappa; \\ s-\sigma, & \text{якщо } m^*-\sigma=\varkappa \quad \forall\sigma\in J_{s-1};\ \Delta_\lambda=\min\limits_{i,j\in J_{k_\lambda}}|e_i^\lambda-e_j^\lambda|\ \forall\lambda\in J_s;\ \Delta_{\alpha_1}\leqslant\ldots\leqslant \\ 0\ , & \text{якщо } m^*-\varkappa>s, \end{cases}$$

$\leqslant\Delta_{\alpha_s}$; $\alpha_i, i\in J_s$; $\{e_1^\lambda,\ldots,e_{k_\lambda}^\lambda\}=S(G^{K_\lambda})$ $\forall\lambda\in J_s$, $k_1+\ldots+k_s=k$, елементи мультимножини $G=\{g_1,\ldots,g_k\}$ задовольняють умову $g_1\leqslant\ldots\leqslant g_k$.

В зв'язку з трудношами реалізації третього етапу розглянемо (на прикладі повністю комбінаторної е-задачі на $E_{kn}(G)$) методологію розв'язування таких задач, яка характерна тим, що після комбінаторного округлення додаткові обмеження не порушуються. Тобто при $m=k$ розглянемо задачу визначення (40) при обмеженнях (41), де $E=E_{kn}(G)$, та додаткових обмеженнях (42). На першому етапі розв'язується задача (40) при обмеженнях (13) і таких:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i \leqslant b_j-\sigma_j \quad \forall j\in J_r, \tag{56}$$

які одержуються з (42). Тут σ_j $\forall j\in J_r$ вибирається так, щоб при переставному округленні з розв'язку задачі (40), (13), (56) – точки $\tilde{x}$ – формувалась $\tilde{x}^0$, яка задовольняє і (42). Наступна теорема дає приклад вибору σ_j $\forall j\in J_r$.

<u>Теорема 5.22.</u> Якщо $\sigma_j=\sigma_j^{(\lambda)}$, $\sigma_j^{(1)}>(g_k-g_1)\sum\limits_{i=1}^{m^*}|a'_{ij}|$; $\sigma_j^{(2)}>(g_k-g_1)m^*|a'_{1j}|$, де $\lambda\in J_2$, $\forall j\in J_r$, a'_{ij} – коефіцієнти j-го обмеження і $|a'_{1j}|>\ldots>|a'_{kj}|$, $m^*=\min\{k,2m_1\}$, m_1 – кількість лінійно незалежних обмежень в (42); розв'язок $\tilde{x}$ задачі (40) при (13), (56) одержано методом ЛП, що дає вершину допустимої області; переставне округлення $\tilde{x}$ першим способом дає $\tilde{x}^0$, то $\tilde{x}^0$ задовольняє (42).

Розглянута методологія може бути застосована для лінійних е-задач (як частково, так і повністю комбінаторних), коли $x\in E$, $E\in\{E_{mn}^k(G), E(G,H), S_n^k(G),\ldots\}$, і для E відома опукла оболонка – система лінійних обмежень та введене комбінаторне округлення.

<u>В шостому розділі</u> досліджуються нелінійні безумовні е-задачі. Розглянуті властивості і розв'язок е-задачі: знайти

$\min\limits_{z\in E_k(J_k)} \sum\limits_{j=1}^{k-1} \sum\limits_{q=j+1}^{k} c_{jq}|z_j-z_q|$, де $c_{jq}>0$ – дійсні сталі. Розглянуто методологію одержання оцінок мінімумів, взагалі кажучи, недиференційовних опуклих та сильно опуклих функцій на е-множинах та їх конкретних реалізаціях. Доведено достатні умови мінімумів в цих задачах на загальних множинах поліпереставлень та розміщень, а також на множині сполучень з повтореннями.

Нехай $\varphi(x)$ – скінченна опукла функція, яка задана на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$. Нехай $p(y)=(p_1(y),\dots, p_k(y))$ – субградієнт функції $\varphi(x)$ в точці y.

Лема 6.8. Якщо $E\subset X$, то: 1) $\forall y\in \mathrm{int}X$ $\min\limits_{x\in E}\varphi(x)\geq \varphi(y)-(p(y),y)+$ $+\min\limits_{x\in E}\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(y)x_i$, 2) щоб точка $y\in E\subset \mathrm{int}X$ була мінімаллю на множині E функції $\varphi(x)$, достатньо виконання $\min\limits_{x\in E}\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(y)x_i=(p(y),y)$.

Теорема 6.10. Якщо $S_n^k(G)\subset X$, то: 1) $\forall y\in \mathrm{int}X$ $\min\limits_{x\in S_n^k(G)}\varphi(x)\geq\varphi(y)-$ $-(p(y),y)+e_1\sum\limits_{i=1}^{s}p_i(y)+e_n\sum\limits_{i=s+1}^{k}p_i(y)$, 2) щоб $y\in S_n^k(G)\subset \mathrm{int}X$ була мінімаллю на $S_n^k(G)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання $(p(y),y)=$ $=e_1\sum\limits_{i=1}^{s}p_i(y)+e_n\sum\limits_{i=s+1}^{k}p_i(y)$, де e_1 – найменший, а e_n – найбільший елементи $S(G)$, а $s\in J_k^0$ знаходиться з $\sum\limits_{j=1}^{t}p_{s-j+1}(y)>0$ $\forall t\in J_s$; $\sum\limits_{j=1}^{t}p_{s+j}(y)<0$ $\forall t\in J_{k-s}$.

Одержано наслідок для диференційовної $\varphi(x)$ на $X\supset S_n^k(G)$.

Теорема 6.12. Якщо $E(G,H)\subset X$, то: 1) $\forall y\in \mathrm{int}X$ $\min\limits_{x\in E(G,H)}\varphi(x)\geq$ $\geq\varphi(y)-(p(y),y)+\sum\limits_{\lambda=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{k_\lambda}p_{\alpha_j^\lambda}(y)g_j^{K_\lambda}$, 2) щоб $y\in E(G,H)\subset \mathrm{int}X$ була мінімаллю на $E(G,H)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання $(p(y),y)=$ $=\sum\limits_{\lambda=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{k_\lambda}p_{\alpha_j^\lambda}(y)g_j^{K_\lambda}$, де $k_1+\dots+k_s=k$, $(\alpha_1^\lambda,\dots,\alpha_{k_\lambda}^\lambda)\in E_{k_\lambda}(N'_\lambda)$ при N'_λ $\forall\lambda\in J_s$ у вигляді (39) задовольняють $p_{\alpha_1^\lambda}(y)\geq p_{\alpha_2^\lambda}(y)\geq\dots\geq p_{\alpha_{k_\lambda}^\lambda}(y)$, а елементи G^{K_i} $\forall i\in J_s$ упорядковані згідно з (38).

Одержано наслідок для диференційовної $\varphi(x)$ на $X\supset E(G,H)$.

Теорема 6.16. Якщо $E^n_{nn}(G)\subset X$, то: 1) $\forall y\in \mathrm{int}X \quad \min\limits_{x\in E^k_{nn}(G)} \varphi(x) \geq \varphi(y)-(p(y),y)+\sum\limits_{i=1}^{s} p_{\beta_i}(y)g_i+\sum\limits_{i=s+1}^{k} p_{\beta_i}(y)g_{n-k+i}$, 2) щоб $y\in E^k_{nn}(G)\subset \mathrm{int}X$ була мінімаллю на $E^k_{nn}(G,H)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання $(p(y),y)=\sum\limits_{i=1}^{s} p_{\beta_i}(y)g_i+\sum\limits_{i=s+1}^{k} p_{\beta_i}(y)g_{n-k+i}$, де $(\beta_1,\ldots,\beta_k)\in E_k(J_k)$ задовольняє $p_{\beta_1}(y)\geq p_{\beta_2}(y)\geq \ldots \geq p_{\beta_s}(y)\geq 0 > p_{\beta_{s+1}}(y)\geq\ldots\geq p_{\beta_k}(y)$, а елементи G упорядковані згідно з (26).

Як відомо, функцію $\psi(x)$, яка задана на X, називають сильно опуклою, якщо існує стала $\rho>0$, така, що $\forall x,y\in X$, таких, що $[x,y]\subset X$, і $\forall\alpha\in[0,1]$ виконується $\psi(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha\psi(x)+(1-\alpha)\psi(y)-\alpha(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2$; ρ називають параметром сильної опуклості. Нехай $\psi(x)$ – сильно опукла функція на опуклій замкненій множині X, $E\subset X$; w точка, що доставляє мінімум $\psi(x)$ на X:

$$w=(w_1,\ldots,w_k)=\arg\min_{x\in X}\psi(x). \tag{57}$$

Теорема 6.23. Якщо $S^k_n(G)\subset X$, то $\min\limits_{x\in S^k_n(G)}\psi(x)\geq\psi(w)+\rho\Big[k\tilde{g}^2+\sum\limits_{j=1}^{k}w_j^2-2e_1\sum\limits_{j=1}^{s}w_i-2e_n\sum\limits_{j=s+1}^{k}w_i\Big]$, де w означається (57), стала $\tilde{g}$ –

$$\tilde{g}=\min_{i\in J_n}|g_i|, \tag{58}$$

$s\in J^0_k$ – співвідношеннями $\sum\limits_{j=1}^{t}w_{s-j+1}\leq 0\quad\forall t\in J_s$; $\sum\limits_{j=1}^{t}w_{s+j}\geq 0\quad\forall t\in J_{k-s}$; а e_1, e_n – відповідно найменший та найбільший елементи $S(G)$.

Теорема 6.24. Якщо $E(G,H)\subset X$, то

$$\min_{x\in E(G,H)}\psi(x)\geq\psi(x)+\rho\Big[\sum_{i=1}^{k}g^2_{\delta_i}+\sum_{i=1}^{k}w_i^2-2\sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{k_q}w_{\alpha_i^q}\,g_{k_{q-i+1}}\Big],$$

де w означається (57), $(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in E_n(J_n)$ задовольняє

$$|g_{\delta_1}|\leq|g_{\delta_2}|\leq\ldots\leq|g_{\delta_n}|. \tag{59}$$

$\forall q\in J_s$, $(\alpha^q_1,\ldots,\alpha^q_{k_q})\in E_{k_q}(N'_q)$ – нерівності $w_{\alpha_1^q}\geq w_{\alpha_2^q}\geq\ldots\geq w_{\alpha^q_{k_q}}$, елементи G^{K_q} – (38), $k_1+\ldots+k_s=k$, а N'_i $\forall i\in J_s$ задається (39).

Далі вважаємо, що $\psi(x)$ – ще й диференційовна на X.

Теорема 6.27. Якщо $S_n^k(G)\subset X$, то: 1) $\forall x\in X$ $\min\limits_{y\in S_n^k(G)}\psi(y)\geq\psi(x)-$
$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i+\rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\rho k\tilde{g}^2+e_1\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}-2\rho x_i\right)+e_n\sum_{i=s+1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}-2\rho x_i\right),$$
2) щоб $x\in S_n^k(G)$ була мінімаллю $\psi(x)$ на $S_n^k(G)$, достатньо виконання $e_1\sum\limits_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}-2\rho x_i\right)+e_n\sum\limits_{i=s+1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}-2\rho x_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i-\rho\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2-$ $-\rho k\tilde{g}^2$, де $\tilde{g}$ визначається (58), $s\in J_k^0$ – системою $\sum\limits_{j=1}^{t}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{s-j+1}}-2\rho x_{s-j+1}\right)\geq0$ $\forall t\in J_s$, $\sum\limits_{j=1}^{t}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{s+j}}-2\rho x_{s+j}\right)\leq0$ $\forall t\in J_{k-s}$; e_1, e_n – відповідно найменший та найбільший елементи $S(G)$.

Теорема 6.28. Якщо $E(G,H)\subset X$, то: 1) $\forall x\in X$ $\min\limits_{y\in E(G,H)}\psi(y)\geq\psi(x)-$
$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i+\rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\rho\sum_{i=1}^{k}g_{s_i}^2+\sum_{q=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_q}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_j^q}}-2\rho x_{\alpha_j^q}\right)g_j^{K_j},$$ 2) щоб $x\in E(G,H)$ була мінімаллю $\psi(x)$ на $E(G,H)$, достатньо виконання $\sum\limits_{q=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{k_q}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_j^q}}-2\rho x_{\alpha_j^q}\right)g_j^{K_j}=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i-\rho\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2-\rho\sum\limits_{i=1}^{k}g_{s_i}^2$, де $(g_1,\ldots,g_n)\in E_n(J_n)$ задовольняє (59), $\forall q\in J_s$, $(\alpha_1^q,\ldots,\alpha_{k_q}^q)\in E_{k_q}(N'_q)$ – нерівності
$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_1^q}}-2\rho x_{\alpha_1^q}\geq\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_2^q}}-2\rho x_{\alpha_2^q}\geq\ldots\geq\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_{k_q}^q}}-2\rho x_{\alpha_{k_q}^q},$$
елементи G^{K_i} –(38), $k_1+\ldots+k_s=k$, а N'_i $\forall i\in J_s$ задається (39).

Нехай
$$g^*=\arg\min_{x\in E(G,H)}\|x-c\|^2. \tag{60}$$

Теорема 6.31. Якщо $E(G,H)\subset X$, то $\min\limits_{x\in E(G,H)}\psi(x)\geq\psi(w)+\|g^*-w\|^2$, де w задовольняє (57), а g^* – (60).

Теорема 6.34. Якщо $E(G,H)\subset X$, то: 1) $\forall x\in X$
$$\min_{y\in E(G,H)}\psi(y)\geq\psi(x)-\frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(x)\|^2+\rho\|g^*-c\|^2,$$
2) щоб точка $x\in E(G,H)$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині

$S(3,M)$, достатньо виконання умови

$$\|\nabla\psi(x)\|^2 = 2\rho\|g^* - c\|, \qquad (61)$$

де g^* означається (60), а

$$c = x - \frac{1}{2\rho}\nabla\psi(x). \qquad (62)$$

Одержані оцінка і достатня умова мінімуму $\psi(x)$ для $E^k_{nn}(G)$.

Результати шостого розділу дають універсальний підхід до оцінки глобальних екстремумів на е-множинах опуклих та сильно опуклих функцій, дають можливість доводити глобальність і оцінювати похибку одержуваного розв'язку в алгоритмах локальної оптимізації на е-множинах, а також можуть бути використані при практичній реалізації різних комбінаторних методів оптимізації.

Нехай $\psi(x)$ – угнута функція ψ: $R^k \to R^1$, а M – опуклий многогранник, $M \subset R^k$, $vertM$ – множина його вершин, $f(x)$ – функція f: $vertM \to R^1$ та $f(x)=\psi(x)$ $\forall x \in vertM$. Для будь-якої функції $f: vertM \to R^1$ існує опукла функція $\varphi: vertM \to R^1$, така, що $\varphi(x)=f(x)$ $\forall x \in vertM$

$$\forall f: vertM \to R^1 \ \exists \psi: vertM \to R^1;\ \psi(x)=f(x)\ \forall x \in vertM. \qquad (63)$$

Розглянемо задачу знаходження

$$\min_{x \in M} \psi(x) \qquad (64)$$

де M – опуклий невироджений многогранник, для якого відомі: критерії вершини, ребра, суміжності вершин, а також розв'язок задач оптимізації на ньому лінійних функцій.

Відзначимо, що якщо існує (64), то

$$\arg\min_{x \in M} \psi(x) \in vertM. \qquad (65)$$

Розглянемо $\min_{x \in vertM} f(x)$. Згідно з (63), (65) ця задача еквівалентна (64). Розглянемо метод її розв'язку. На першому етапі по критерію вершини виберемо довільну $x \in vertM$. Обчислимо $f(x)$. Застосувавши критерій суміжності вершин M, перейдемо до сусідньої з меншим значенням функції $f(x)$. Продовжимо це до одержання $x^0 \in vertM$, такої, що $f(x) > f(x^0) = f^0$ $\forall x$, суміжних з x^0.

Перенесемо початок координат в x^0. Другий етап методу складається з декількох кроків, на кожному з яких треба дослідити розв'язок однієї чи декількох задач ЛП на M. Позначимо ці задачі z_{ij}, де i - номер кроку, j - номер задачі на кроці i з множини $J=\{1,2, \ldots, |J|\}$ всіх номерів задач на цьому кроці. Геометрично розв'язування z_{ij} означає знаходження $x^{ij}\in vertM$, найбільш віддаленої зі сторони, протилежній x^0, від деякої гіперплощини

$$c(x)\equiv c_0^{ij} + \sum_{n=1}^{k} c_n^{ij}x_n=0,\ x=(x_1,\ldots,x_k),\ c_n^{ij}\in R^1\ \forall n\in J_k^0, \quad (66)$$

тобто для точки x^{ij} має виконуватися співвідношення

$$\mathrm{sign}\ c(x^0)\ \mathrm{sign}\ c(x^{ij}) < 0. \quad (67)$$

Таким чином, якщо покласти $c(x^0)<0$, для знаходження x^{ij}, або визначення, що $x^{ij}=\varnothing$, необхідно знайти

$$\arg\max_{x\in M} c(x) \quad (68)$$

і перевірити $c(x^{ij})>0$, що еквівалентно (67). На першому кроці методу розглядається тільки одна задача Z_{11}, для якої (66) є гіперплощиною, що проходить через k точок: $y^{m11}=\lambda^m x^m$ $\forall m\in J_k$, де x^m - довільна фіксована точка, яка належить ребру M під номером m, $m\in J_k$, яке виходить з x^0. Ребро легко вибрати за допомогою критерію ребра і таких ребер, що виходять з x^0 рівно k, так як M невироджений. λ^m, якщо вона обмежена, визначається як розв'язок задачі $\lambda^m=\max_{\lambda\in R^1}\lambda$ при $\psi(\lambda x^m)\geq f^0$. У випадку необмеженості λ, яка задовольняє останню нерівність, λ^m обирається довільно великою.

<u>Теорема 6.36.</u> Якщо задача Z_{11} не має розв'язку, то точка x^0 дає розв'язок задачі (64).

Якщо Z_{11} має розв'язок x^{11}, то переходимо на другий крок, поклавши $f^1=\min\{f^0,f(x^{11})\}$. Опишемо q-й крок ($q>1$). Розглянемо розв'язки $x^{(q-1)j}$ задач, якщо вони є, попереднього кроку, $j\in J$. Для кожної точки $x^{(q-1)j}$ сформуємо множину задач $Z_j=\{z_{qt}\}_{t=1}^{t=k}$ вигляду (68) так. Для задачі $z_{qt}\in Z_j$ (67) проводиться через k точок

y^{mqj}, $m\neq t$, $m\in J_k$ з множини $\{y^{mqj},\ m\in J_k^0\}$, яка визначається як: $y^{mqj}=\lambda^{mqj}y^{m(q-1)j}$ $\forall m\in J_k^0$, де $y^{0(q-1)j}=x^{(q-1)j}$, а λ^{mqj} (якщо вона обмежена) – розв'язок задачі: $\lambda^{mqj}=\max\limits_{\lambda\in R^1}\lambda$ при $\psi(\lambda y^{m(q-1)j})\geq f^{q-1}$.

У випадку необмеженості λ, яка задовольняє останню нерівність, λ^{mqj} вибирають довільно великою. На кроці q сформовано, і просто розв'язуються задачі з множини $Z=\bigcup\limits_{j\in J}Z_j$ вигляду (68) при (67).

Теорема 6.37. Якщо ні одна з задач множини Z не має розв'язку, то f^{q-1} є розв'язком задачі (64).

Якщо хоча б одна з задач множини Z має розв'зок, то $f^q=$ $=\min\{f^{q-1},\ \min\limits_{\substack{t(j)\in J_k\\ j\in J}} f(x^{qt(j)})\}$, де $x^{qt(j)}$ – розв'язок задачі $z_{qt}\in Z_j$. Після цього переходять на наступний крок другого етапу методу. Доведено скінченність методу. Розглянутий метод дозволяє розв'язувати е-задачі на $E\subset R^k$ з довільною цільовою функцією $f:E\to R^1$, якщо E має властивість vertconvE=E. Коли vertconvE⊂E для застосування цього методу цільова функція $f:E\to R^1$ повинна мати властивість $f(x)=\varphi(x)$ $\forall x\in E$, де $\varphi(x)$ – угнута на X функція, $E\subset X\subset R^k$.

В сьому розділі побудовані моделі ряду задач геометричного проектування у вигляді е-задач, що дало можливість застосувати для їх розв'язання обгрунтовані раніше методи. Це зроблено для задач: розкрою напівнескінченної смуги на прямокутники однакової ширини; розміщення прямокутників однакової довжини в напівнескінченній смузі; мінімізації зваженої довжини зв'язуючої сітки при лінійному розташуванні прямокутних елементів; задачі про з'єднання елементів; кольорового упаковування прямокутників однакової ширини в напівнескінченній смузі.

Розглянемо методологію побудови математичної моделі у вигляді е-задачі на прикладі останньої з названих задач. Нехай є набір p прямокутників шириною h, довжинами $a_1, \ldots, a_p$ s різних кольорів ($s<k$) і смуга шириною H_0, яка розділена на q смужок шириною h кожна. Смужка i шириною h може мати m_i зон заборони, $i\in J_q$. Задані відстані від початку полоси шириною H_0 до початку і кінця зони заборони j в смужці i шириною h: c_{ij} та d_{ij} відповідно, $0<c_{ij}<d_{ij}$, $j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$. Заданий розподіл набору прямокутників з довжинами $a_1, \ldots, a_p$ на набори, в яких прямокутники тільки одного кольору, позначимо їх довжини $a_1^\lambda, \ldots, a_{p_\lambda}^\lambda$, $\lambda\in J_s$, $p_1+\ldots+p_s=p$. Необхідно упакувати заданий набір прямокутників так, щоб мінімізувати довжину зайнятої частини смуги шириною H_0, задовольнивши обмеження: в смужці i після зони заборони j до наступної (якщо вона є) розташовано прямокутників кольору λ: 1) не більше $Q_{ij\lambda}$; 2) рівно $Q_{ij\lambda}$, $j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$, $\lambda\in J_s$, ($Q_{ij\lambda}<k$). Припустимо, що виконується $a_1^\lambda\leq\ldots\leq a_{p_\lambda}^\lambda$, а також, що зони заборони розташовані так, що $d_{im_i}<\lambda^*$ $\forall i\in J_q$, де λ^* - мінімальна довжина зайнятої частини смуги шириною H_0.

Для побудови математичної моделі поставленої задачі припустимо, що $K_{ij\lambda}$ - максимальна кількість прямокутників кольору λ, $\lambda\in J_s$, яка може бути упакована після зони заборони j (до наступної, якщо вона ще є) в смужці i; $j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$. Значення величин $K_{ij\lambda}$ визначаються з системи

$$\begin{cases} K_{ij\lambda}\leq Q_{ij\lambda}; \quad \sum\limits_{t=1}^{K_{ij\lambda}} a_t^\lambda\leq c_{i(j+1)}-d_{ij}; \\ \sum\limits_{t=1}^{K_{ij\lambda}+1} a_t^\lambda > c_{i(j+1)}-d_{ij}; \quad j\in J_{m_i},\ i\in J_q, \lambda\in J_s, \end{cases} \tag{69}$$

або задаються рівними $Q_{ij\lambda}$ в залежності від умов задачі. Позначимо $\sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{m_i} K_{ij\lambda}=k_\lambda$, $\lambda\in J_s$, та $k_1+\ldots+k_\lambda=k$. Якщо $k_\lambda\neq p_\lambda$, $\lambda\in J_s$, то припустимо, що крім p_λ заданих прямокутників кольору λ упакозується ще $k_\lambda - p_\lambda$ прямокутників нульової довжини. Тоді можна вважати, що після зони заборони j (до наступної, якщо вона є) в смужці i упаковується рівно $K_{ij\lambda}$ прямокутників кольору λ, $\lambda \in J_s$, $j \in J_{m_i}$, $i \in J_q$. З урахуванням цього позначимо довжину прямокутників, що упаковуються, через g_i, $i \in J_k$. Позначимо G мультимножину, що складається з елементів g_i, $i \in J_k$. $G=\{g_1, \ldots, g_k\}=\{g_1^{K_1}, \ldots, g_{k_1}^{K_1}, \ldots, g_1^{K_s}, \ldots, g_{k_s}^{K_s}\}$, де через $g_i^{K_\lambda}$, $i \in J_{k_\lambda}$, позначена так, що виконуються нерівності (52), довжина прямокутника кольору λ, який упаковується. Нехай $E(G,H)$, як і раніше, – загальна поліпереставна множина, сформована з дійсних чисел, які складають мультимножину чисел G, за допомогою множини переставлень H. Побудуємо множину $E(G,H)$ для задачі, що розглядається.

Розглянемо упорядковане розбиття множини J_k на s множин $K_1, \ldots, K_s$, $K_i \cap K_j = \varnothing$, $K_i \neq \varnothing$ $\forall i, j \in J_s$, $k_\lambda = |K_\lambda|$, $\lambda \in J_s$. Нехай $K_\lambda = \{\gamma_{ij\lambda}, \gamma_{ij\lambda}+1, \ldots, \gamma_{ij\lambda}+K_{ij\lambda}-1 \mid \forall j \in J_{m_i}, \forall i \in J_q\}$ $\forall \lambda \in J_s$, де величини $\gamma_{ij\lambda}$ обчислюються за формулами (49)-(51), а сталі $K_{ij\lambda}$ визначаються з системи (69). Позначимо $H=E_k(J_k)$ – множину переставлень $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_k)$, а $\pi_{\gamma_{ij\lambda}+t}$ – елемент переставлення – номер з множини J_k прямокутника кольору λ, $\lambda \in J_s$, що стоїть серед прямокутників цього кольору на місці $t+1$, $t \in K^0_{ij\lambda}-1$, в смужці i, $i \in J_q$, після зони заборони j, $j \in J_{m_i}$, перед наступною (якщо вона є). Числа $\pi_{\gamma_{ij\lambda}+t}$ $\forall j \in J_{m_i}$, $\forall i \in J_q$, $\lambda = const$, $\lambda \in J_s$ – це елементи деякого переставлення $\pi^\lambda \in E_{k_\lambda}(K_\lambda)$. Якщо, не обмежуючи загальності подальших міркувань, в мультимножині $G=\{g_1, \ldots, g_k\}$ на місцях з номерами з множини K_λ розташувати прямокутники кольору λ, тоді математична модель задачі може бути подана у вигляді: знайти елемент $\pi^* \in H$, щоб на ньому досягався $\min\limits_{\pi \in H} \max\limits_{i \in J_q} \left(\sum\limits_{\lambda=1}^{s} \sum\limits_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} g_{\pi_{\gamma_{im_i\lambda}+1}} + d_{im_i} \right)$, при додаткокових обмеженнях $\sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} g_{\pi_{\gamma_{im_i\lambda}+1}} < c_{i(j+1)} - d_{ij}$, $\forall j \in J_{m_i-1}$, $\forall i \in J_q$, де $\gamma_{ij\lambda}$ – величина, на одиницю більша максимальної сумарної кількості прямокутників кольору λ, $\lambda \in J_s$, які можна поставити в смужку i, $i \in J_q$, до зони заборони j та в смужки з номерами, що є меншими за i. Вони обчислюються за формулами (49)-(51). Після занурення множини H в R^k одержуємо е-задачу (46) при обмеженнях (44), (47)-(51). Метод її наближеного розв'язування та апріорна оцінка відносної точності розглянуто в п'ятому розділі.

3. ВИСНОВКИ

В дисертації розроблена теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації як перспективний апарат в математичній кібернетиці.

Дослідження грунтувалося на проведеній класифікації евклідових комбінаторних задач оптимізації і дослідженнях їх властивостей у двох напрямах: евклідові комбінаторні множини та цільові функції.

Введені до розгляду та досліджені конкретні реалізації евклідових комбінаторних множин, які утворюють допустимі області цих задач, та комбінаторні многогранники. Це розроблено для загальних множин переставлень, поліпереставлень та розміщень, множини сполучень з повтореннями. При цьому отримано опис комбінаторних многогранників для названих евклідових комбінаторних множин у вигляді систем лінійних обмежень. Одержано критерії вершин, грані довільної вимірності, суміжності вершин та граней. Сформульовані і доведені інші властивості опуклих оболонок евклідових комбінаторних множин, зокрема збіг множини вершин загальних многогранників переставлень і поліпереставлень з загальними множинами переставлень та поліпереставлень відповідно.

Розроблено методику розкладання евклідових комбінаторних множин по паралельних площинах та інших множинах. Одержано і досліджено розкладання множин переставлень, розміщень, сполучень по паралельних площинах, а множин розміщень та сполучень - по наборах відповідних вкладених комбінаторних многогранників.

Досліджено екстремальні властивості функцій різних класів в зв'язку з оптимізацією їх на евклідових комбінаторних множинах. Розроблено методику розв'язання задач оптимізації лінійних функцій без додаткових обмежень на цих множинах, яку застосовано для отримання екстремалей у випадку множини сполучень з повтореннями, загальних множин поліпереставлень та розміщень.

Для евклідових комбінаторних множин та їх конкретних реалізацій розглянуто методику одержання оцінок мінімумів недиференційовних опуклих, а також сильно опуклих функцій, і методику отримання і обгрунтування достатніх умов мінімуму цих функцій на евклідових комбінаторних множинах. Ці оцінки і достатні умови наведені і обгрунтовані у випадку загальних множин розміщень та поліпереставлень, множини сполучень з повтореннями.

Досліджені розкладання евклідових комбінаторних множин і одержані оцінки та достатні умови мінімумів опуклих і сильно опуклих функцій закладають основу застосування комбінаторних методів оптимізації до евклідових комбінаторних задач.

Запропоновано і досліджено підходи до розв'язання лінійних задач на евклідових комбінаторних множинах з додатковими обмеженнями. В рамках цього підходу побудовано наближені розв'язки таких задач на загальній множині переставлень. Проілюстровано методику одержання у цьому випадку апріорної оцінки точності розв'язку.

Обгрунтовано запропонований метод розв'язання задач безумовної евклідової комбінаторної оптимізації на множинах, які збігаються з множинами вершин своєї опуклої оболонки (поліпереставної, переставної множин тощо), а також задач безумовної оптимізації угнутих функцій на довільних евклідових комбінаторних множинах.

Розроблені в дисертації теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації застосовані до розв'язання ряду задач геометричного проектування, зокрема задачі розкрою напівнескінченної смуги на прямокутники однакової ширини, задачі розміщення прямокутників однакової довжини в напівнескінченній смузі, задачі мінімізації зваженої довжини зв'язуючої сітки при лінійному розташуванні прямокутних елементів, задачі упаковування різнокольорових прямокутників однакової ширини в напівнескінченній смузі та інших.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ОПУБЛІКОВАНІ В ПРАЦЯХ:

Монографії:

1. Стоян Ю.Г, Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. - Київ: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. - 188 с.

Учбовому посібнику:

2. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие.- Киев.: Учеб.-метод.кабинет высш. образования, 1992. - 92 с.

3. Стоян Ю.Г., Емец О.А. О комбинаторных задачах размещения прямоугольников // Экономика и мат. методы. - 1985. - Т.21, вып.5. - С. 868-881.

4. Емец О.А. Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и свойства задач оптимизации на нем // Докл. АН УССР. - 1991. - №4. - С. 69-72.

5. Емец О.А. Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников// Экономика и мат. методы. - 1993.

Т.29, вып. 2. - С. 294-304.

6. Емец О.А. Об оптимизации линейных и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок// Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1994. - №6. - С. 855-869.

7. Емец О.А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Укр. мат. журн. - 1994. - Т.46, №6 - С. 680-691.

8. Yemets O.A. The optimization of linear and convex functions on a Euclidean combinatorial set of polypermutations// Comp. Maths. Math. Phys. - 1994. - V. 34, N6. - P. 737-748.

9. Емец О.А. Свойства специальных комбинаторных задач оптимизации, методы и алгоритмы их решения // Теоретические проблемы кибернетики. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. - С. 61-63.

10. Емец О.А. Задачи оптимизации на евклидовом полиперестановочном множестве с повторениями: свойства допустимого множества // Методы и программные средства оптимизации, моделирования и создания вычислительных систем. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1990. - С. 22-24.

11. Емец О.А. Экстремальные свойства недифференцируемых выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах // Математическое моделирование и оптимизация технических систем и процессов. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1993. - С. 34-37.

12. Емец О.А., Евсеева Л.Г. Метод решения комбинаторной задачи размещения прямоугольников с использованием оценки и достаточного условия минимума выпуклой недифференцируемой функции // Математическое моделирование и оптимизация технических систем и процессов. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1993. - С. 37-40.

13. Емец О.А. К комбинаторным задачам размещения прямоу-

гольников // Математическое обеспечение рационального раскроя в системах автоматизированного проектирования.- Уфа: УАИ, 1987. - С. 63.

14. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А. Комбинаторные множества размещений и их свойства. - Харьков, 1990. - 38 с. - (Препр./АН УССР. Ин-т проблем машиностр.; 342).

15. Emets O.A. Extremal properties of nondifferentiable convex functions on euclidean sets of combinations with repetitions // Ukr. Math. J. - 1994. - V.46, N6. P. 735-747.

16. Емец О.А. Свойства некоторых математических моделей в оптимизационных задачах геометрического проектирования // Математическое и имитационное моделирование в системах проектирования и управления. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1990. - С. 108-111.

Summary

O.A.Yemets. The theory and combinatorial optimization methods on Euclidean combinatorial sets in the geometric designing.

This dissertation is a manuscript being submitted for a Doctor of Science Degree (Physics and Mathematics) in speciality 01.05.01 - theoretical bases of informatics and cybernetics (mathematical cybernetics).

National Academy of Science of Ukraine, Institute of Cybernetics named after V.M.Glushkov, Kiev,1997.

The properties of the Euclidean combinatorial sets (the general set of permutations, the set of polypermutations, the set of arrangements and the set of combinations with repetitions) are investigated. The optimization theory and methods of optimization for diffrent classes of functions on these sets are extended. Some applications in the geometric designing are considered.

АННОТАЦИЯ

Емец О.А. Теория и методы комбинаторной оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах в геометрическом проектировании.

Диссертация является рукописью, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.01 - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика).

Национальная академия наук Украины, Институт кибернетики им. В.М.Глушкова, Киев, 1997.

Исследуются свойства евклидовых комбинаторных множеств: общего множества перестановок, полиперестановок, размещений и сочетаний с повторениями. Развивается теория и методы оптимизации разных классов функций на этих множествах. Рассмотрены некоторые приложения в геометрическом проектировании.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, комбінаторні множини, геометричне проектування, математична кібернетика, переставлення, поліпереставлення, розміщення, сполучення, опуклі оболонки.

Підписано до друку 14.04. 1997р. Формат 60х84 1/16.
Папір друкарський. Ум. друк. арк. 2.00. Друк офсетний.
Обл.-вид. арк. 1,92. Тираж 100 пр. Замовлення № 460
Безкоштовно.

Дільниця оперативного друку статистичного управління
Полтавської області
м. Полтава, вул. Пушкіна, 103.