НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМЕНІ В.М. ГЛУШКОВА

Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ
Міжнародної наукової конференції,
присвяченої 60-річчю заснування
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Україна, Київ
13–15 грудня 2017 року

Київ 2017

УДК 519.6:004.9:621.39:517

Розглянуто результати досліджень у галузі математичного та комп'ютерного моделювання, системного аналізу та оптимізації, архітектури програмних і обчислювальних систем, паралельних обчислень, інформаційно-комунікаційних технологій, проблем управління та розробки високонадійних програмних систем, нових інформаційних технологій захисту інформації.

Для науковців у галузі обчислювальної та прикладної математики, комп'ютерних наук, інформаційних технологій, комп'ютерних засобів, систем та мереж.

Рассмотрены результаты исследований в области математического и компьютерного моделирования, системного анализа и оптимизации, архитектуры программных и вычислительных систем, параллельных вычислений, информационно-коммуникационных технологий, проблем управления и разработки высоконадежных программных систем, новых информационных технологий защиты информации.

Для научных работников в области вычислительной и прикладной математики, компьютерных наук, информационных технологий, компьютерных средств, систем и сетей.

Рецензент: академік НАН України ЗАДІРАКА В.К.

Затверджено до друку вченою радою
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Адреса редколегії:
03187, Київ-187, проспект Академіка Глушкова, 40
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України
www.incyb.kiev.ua
incyb@ incyb.kiev.ua

ISBN 978-966-02-8362-6

УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, А.О. ЕМЕЦ, И.М. ПОЛЯКОВ
Полтавский университет экономики и торговли, Полтава.

О КРИТЕРИИ РЕБРА ОБЩЕГО МНОГОГРАННИКА РАЗМЕЩЕНИЙ

Задачи оптимизации на размещениях представляют собой актуальный класс задач оптимизации (см., в частности, [1–5]). Исследование и решение таких задач предполагает изучение свойств, во-первых, целевых функций, а во-вторых, их допустимых множеств, в том числе общего многогранника размещений. Результаты таких исследований изложены в ряде публикаций, среди которых отметим [2–5]. В частности, в этих работах исследовался общий многогранник размещений – выпуклая оболочка множества упорядоченных выборок из заданного мультимножества. В докладе изложены результаты исследований граневой структуры общего многогранника размещений (ОМР). Терминология, используемая далее, соответствует принятой в [2].

О ребрах многогранника размещений. Рассмотрим многогранник $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$ k-размещений, где $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ — основа мультимножества $S(G)=\{e_1,...,e_n\}$, $[G]=\{\eta_1,...,\eta_n\}$ — первичная спецификация. Пусть $g_1\le...\le g_\eta$, $e_1\le...\le e_n$, а $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$ задается [2] системой ограничений

$$\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\eta-i+1} \quad \forall\omega\subset J_k=\{1,2,...,k\},\ |\omega|\le k. \tag{1}$$

Вершина $x=(x_1,...,x_k)$ многогранника $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$ характеризуется тем, что она является перестановкой элементов любого мультимножества вида $x_i\in\{g_1,...,g_s,g_{\eta-r+1},...,g_{\eta-1},g_\eta\}$, $r+s=k$ $\forall s,r\in J_k^0=\{0,1,2,...,k\}$ [2, теорема 2.33]. Вершина x является соседней с y для $vert\,\Pi_{\eta n}^{k}(G)$, если выполняется [2] одно и только одно из условий: 1) проведена перестановка g_i, g_{i+1} ($g_i\ne g_{i+1}$); 2) выполнена замена g_s на $g_{\eta-r}$ (или $g_{\eta-r+1}$ на g_{s+1}) ($g_s\ne g_{\eta-r}$; $g_{\eta-r+1}\ne g_{s+1}$). Известен второй критерий вершины [5, теорема 3.1], который состоит в том, что вершина A вида $x_1=g_1$, …, $x_s=g_s$, $x_{s+1}=g_{\eta-r+1}$, …, $x_{k-1}=g_{\eta-1}$; $x_k=g_\eta$ задается вместе с (1) системой

$$\begin{cases} x_1=g_1;\quad x_1+x_2=g_1+g_2;\quad ...;\quad x_1+...+x_s=g_1+...+g_s;\\ x_k=g_\eta;\quad x_k+x_{k-1}=g_\eta+g_{\eta-1};\quad ...;\quad x_k+...+x_{s+1}=g_\eta+g_{\eta-1}+...+g_{\eta-r+1}.\end{cases} \tag{2}$$

Уравнения с первого по s-е назовем левопорожденной частью системы (2), а остальные уравнения – правопорожденной частью этой системы, что объясняется их связью с левой и правой частями системы (1). Очевидно, не нарушая общности, достаточно рассматривать систему для вершины, номера координат которой задаются тождественной подстановкой $\begin{pmatrix}1\,2\,...\,k\\1\,2\,...\,k\end{pmatrix}$. Для подстановки $\begin{pmatrix}1\,2\,...\,k\\i_1\,i_2\,...\,i_k\end{pmatrix}$ имеем:

$$\begin{cases} x_{i_1}=g_1;\quad x_{i_1}+x_{i_2}=g_1+g_2;\quad ...;\quad x_{i_1}+...+x_{i_s}=g_1+...+g_s;\\ x_{i_k}=g_\eta;\quad x_{i_k}+x_{i_{k-1}}=g_\eta+g_{\eta-1};\quad ...;\quad x_{i_k}+...+x_{i_{s+1}}=g_\eta+g_{\eta-1}+...+g_{\eta-r+1}.\end{cases} \tag{3}$$

Как и в (2), первые s уравнений (3) — левопорожденная часть системы, остальные уравнения — правопорожденная часть. Ребро многогранника – отрезок, соединяющий две смежные вершины. Рассмотрим вершины, соседние с вершиной A, задаваемой вместе с (1) системой (2). Таким образом, имеем два случая: 1) перестановка координат; 2) замены координат.

1. Для получения соседней вершины выполняем перестановки координат g_i и g_{i+1} ($g_i\ne g_{i+1}$).

1.1. В случае, когда $i,i+1\in J_s$ получаем вершину B, тогда имеем

$$\begin{cases} x_1=g_1;\quad x_1+...+x_{i-1}=g_1+...+g_{i-1};\quad x_1+...+x_i=g_1+...+g_{i-1}+g_{i+1};\\ x_1+...+x_i+x_{i+1}=g_1+...+g_{i-1}+g_{i+1}+g_i;\quad ...;\quad x_1+...+x_s=g_1+...+g_s;\\ x_k=g_\eta;\quad x_k+x_{k-1}=g_\eta+g_{\eta-1};\quad ...;\quad x_k+...+x_{s+1}=g_\eta+g_{\eta-1}+...+g_{\eta-r+1}.\end{cases} \tag{4}$$

Часть системы, содержащая уравнения с x_k для этой вершины B (правопорожденная часть), повторяет часть системы (2) с уравнениями, в которых есть x_k. Более того, все уравнения (2) и (4), не содержащие x_k, также совпадают, кроме i-го. Общим уравнениям удовлетворяют соседние вершины A и B, т. е. ребро AB задается совместно с (1) системой, в которой $i \in J_{s-1}$: $x_1 = g_1$; …; $x_1 + \ldots + x_{i-1} = g_1 + \ldots + g_{i-1}$; $x_1 + \ldots + x_i + x_{i+1} = g_1 + \ldots + g_i + g_{i+1}$; …; $x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s$; $x_k = g_\eta$; $x_k + x_{k-1} = g_\eta + g_{\eta-1}$; …; $x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1}$.

1.2. Для получения соседней вершины переставляем g_j и g_{j+1},

где $j, j+1 \in J_\eta^{\eta-r+1} = \{\eta - r + 1, \eta - r + 2, \ldots, \eta - 1, \eta\}$; получаем вершину C. Тогда уравнения с x_1 в (2) (левопорожденная часть) повторяются в системе для вершины C: $x_1 = g_1$; …; $x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s$; $x_k = g_\eta$; $x_k + x_{k-1} = g_\eta + g_{\eta-1}$; …; $x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j+1}$; $x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} +$; $+ x_{k-j} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j+1} + g_{\eta-j-1}$; $x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} + x_{k-j} + x_{k-j-1} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j+1} + g_{\eta-j-1} +$ $+ g_{\eta-j}$; $x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} + x_{k-j} + x_{k-j-1} + x_{k-j-2} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j-2}$; …; $x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta +$ $+ g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1}$.

Все уравнения последней системы и системы (2), кроме содержащего только все переменные x_k, x_{k-1}, …, x_{k-j+1}, совпадают и им удовлетворяют точки A и C. Таким образом, ребро AC задается совместно с (1) следующей системой, где $j \in J_{r-1}^0 = \{0, 1, 2, \ldots, r-2, r-1\}$ (напомним, что $r + s = k$): $x_1 = g_1$; …; $x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s$; $x_k = g_\eta$; $x_k + x_{k-1} = g_\eta + g_{\eta-1}$; …; $x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j+1}$; $x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} + x_{k-j} + x_{k-j-1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots +$ $+ g_{\eta-j+1} + g_{\eta-j} + g_{\eta-j-1}$; …; $x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1}$, т.е. из системы (2) ребра AB, AC получаем отбрасыванием любого уравнения, кроме s-го или последнего.

2. Для получения соседней вершины может быть осуществлена замена координат.

2.1. Образование соседней вершины D из (2) осуществляется заменой g_s на $g_{\eta-r}$ ($g_s \neq g_{\eta-r}$). Для D получаем

$$\begin{cases} x_1 = g_1; \quad \ldots; \quad x_1 + \ldots + x_{s-1} = g_1 + \ldots + g_{s-1}; \quad x_k = g_\eta; \quad \ldots; \\ x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-r+1}; \quad x_k + \ldots + x_{s+1} + x_s = g_\eta + \ldots + g_{\eta-r+1} + g_{\eta-r}. \end{cases} \tag{5}$$

Из (2) в систему (5) входят все уравнения, кроме s-го, т. е. ребро AD получаем как общую часть (1), (2) и (5), т. е. из (2) берем все уравнения, кроме s-го.

2.2. Образование соседней к A вершины E из (5) осуществляется заменой координаты $g_{\eta-r+1}$ на g_{s+1} ($g_{\eta-r+1} \neq g_{s+1}$).Для E получаем

$$\begin{cases} x_1 = g_1; \quad \ldots; \quad x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s; \quad x_1 + \ldots + x_{s+1} = g_1 + \ldots + g_s + g_{s+1}; \\ x_k = g_\eta; \quad x_k + \ldots + x_{s+2} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-r+2}. \end{cases} \tag{6}$$

Из (2) в (6) входят все уравнения, кроме последнего. Таким образом, если брать общие в (2) и (6) уравнения, то это аналогично тому, что в (2) отбросить последнее уравнение и получить из (1) ребро AE. Значит, некоторое ребро из вершины A получим из системы (1), присоединив к ней систему (2) без одного уравнения. Таким образом, доказано следующее описание ребра общего многогранника размещений.

Теорема 1. Если подсистема ограничений системы (1) описывает внутренние точки ребра общего многогранника размещений, то вместе с (1) выполняются $k-1$ уравнение из (3).

Идентификация ребра по системе уравнений из системы для ОМР. Пусть вершина $g \in \Pi_{\eta n}^k(G)$ определяется системой (3). Введем обозначение для левопорожденной части (3) $\omega_1^L = \{i_1\}$; $\omega_2^L = \{i_1, i_2\}$; …; $\omega_s^L = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, а для правопорожденной части системы (3) $\omega_1^R = \{i_k\}$; $\omega_2^R = \{i_k, i_{k-1}\}$; …; $\omega_r^R = \{i_k, i_{k-1}, \ldots, i_{s+1}\}$; отметим, что $r + s = k$, $s, r \in J_k^0$. Очевидно, что

$$\omega_1^L \subset \omega_2^L \subset \ldots \subset \omega_s^L; \tag{7}$$

$$\omega_1^R \subset \omega_2^R \subset \ldots \subset \omega_r^R; \tag{8}$$

а также что $\omega_s^L \cup \omega_r^R = J_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Пусть после исключениия уравнения из системы, которая описывает вершину, с целью образовать ребро соответствующие системы подмножеств изменились (точнее, одно из них уменьшилось на единицу), т.е. если исключить уравнения из левопорожденной подсистемы, то получим подмножество индексов

$$\omega_{i_1}^{L} \subset \omega_{i_2}^{L} \subset \ldots \subset \omega_{i_{s-1}}^{L} \tag{9}$$

и подмножества индексов (8), а если исключить уравнения из правопорожденной подсистемы, то имеем подмножество индексов (7) и подмножества индексов

$$\omega_{j_1}^{R} \subset \omega_{j_2}^{R} \subset \ldots \subset \omega_{j_{r-1}}^{R} . \tag{10}$$

Отметим, что мы рассматриваем множество k-размещений $E_{\eta n}^{k}(G)$, общий многогранник размещений $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$, где $G = \{ g_1, \ldots, g_\eta \}$; $g_1 \le \ldots \le g_\eta$; $S(G) = (e_1, \ldots, e_n)$, $e_1 < \ldots < e_n$; $[G] = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Напомним [3], что вершиной $x = \{ x_1, \ldots, x_k \} \in vert\, \Pi_{\eta n}^{k}(G)$ является точка, координаты которой – это такие элементы из G: $g_1, \ldots, g_s, g_{\eta-r+1}, g_{\eta-r+2}, \ldots, g_\eta$, где $s + r = k$; $s, r \in J_k^0 = \{ 0, 1, 2, \ldots, k \}$, и только они стоят в произвольном порядке в x. Таким образом, одной из вершин является точка $g^0 = (g_1, g_2, \ldots, g_s, g_{\eta-r+1}, g_{\eta-r+2}, \ldots, g_\eta)$, а иные вершины образуются перестановкой этих элементов или выбором другого $s \in J_k^0$, а значит и $r = k - s$. Определим параметр σ для случае $s \ne 0$:

$$g_s = e_\sigma; \tag{11}$$

а в случае $s = 0$, то и $\sigma = 0$. Определим параметр ρ для случая $r \ne 0$:

$$g_{\eta-r+1} = e_\rho , \tag{12}$$

а в случае $r = 0$, то и $\rho = 0$. Введем $K_0 = 0$; $K_1 = \eta_1$; $K_2 = \eta_1 + \eta_2$; …; $K_\sigma = s - K_{\sigma-1}$, где σ определяется из (11). Введем $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = \eta_n$, $\nu_2 = \eta_n + \eta_{n-1}$, …, $\nu_\rho = r - \nu_{\rho-1}$, где ρ определяется из (12). Таким образом, имеем теорему.

Теорема 2 (Об идентификации ребра уравнениями в системе ОМР). 1) Если F — ребро ОМР (общего многогранника размещений), то существует, возможно, не единственная (в случае, когда G — мультимножество, а не множество) система равенств с подмножествами индексов неизвестных, которые определяют (8), (9) или (7), (10). 2) Если имеем множество индексов (8), (9) или (7), (10), которые в системе (1) определяют равенства, то эти условия дают множество F: ребро ОМР или его вершину. Размерность этого множества F определяется так: $\dim F = k - \{ \lambda + \sum (|\omega_\tau| - |\omega_{\tau-1}| - 1) \}$, где $\lambda = k - 1$, а суммирование выполняется для (9) или (10) при таких индексах ($\tau \in J_{s-1}$ для (9); $\tau \in J_{r-1}$ для (10)), для каждого их которых найдется $j \in J_\sigma$ (для (9)), $j \in J_\rho$ (для (10)). При этом для (9) $K_{j-1} \le |\omega_{\tau-1}| = |\omega_{i_{\tau-1}}^{L}|$ и $|\omega_{i_\tau}^{L}| = |\omega_\tau| \le K_j$ (где $\omega_0 = 0$), а для (10): $\nu_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}| = |\omega_{j_{\sigma-1}}^{R}|$ и $|\omega_{j_\sigma}^{R}| = |\omega_\sigma| \le \nu_j$ (где $\omega_0 = 0$).

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая. М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. — 188 с.— Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
3. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с. — Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
4. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с. — Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
5. Емец О.А., Черненко О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях: монография. — К.: Наук. думка, 2011. — 154 с. — Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.

З М І С Т

Секція 1
Теоретичні проблеми кібернетики та інформатики