

УДК 519.1

Л.М. Колечкіна

МЕТОД ЛОКАЛІЗАЦІЇ ЗНАЧЕННЯ ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ З ЛІНІЙНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Вступ

Останнім часом досить поширеними є задачі комбінаторної оптимізації. Головним чином це зумовлено тим, що на практиці багато прикладних задач описуються моделями, в яких цільова функція визначена на комбінаторних конфігураціях. Зокрема, такі задачі виникають при дослідженні багатьох теоретичних і прикладних проблем [1–6]. Розширення застосувань комбінаторних задач призводить до їх ускладнення, зокрема, до появи нових або розгляду не досить вивчених комбінаторних моделей [5, 6], які мають велику розмірність, спеціальну структуру, неточну інформацію про значення тощо. Розв'язання таких задач пов'язане із значними труднощами і потребує розробки і обґрунтування нових або модифікації відомих методів. У даному аспекті досить корисним буде застосування теорії графів. За їх допомогою добре описуються багато типів комбінаторних задач [7–11]. При цьому графічні уявлення є не просто ілюстраціями, але й дають можливість одержувати нові підходи до їх розв'язання, а також результати. Слід відзначити тісний зв'язок результатів про метричні характеристики графів многогранників з проблемами оцінки числа ітерацій і ефективності алгоритмів симплексного типу в задачах лінійного програмування.

Постановка задачі

У даній статті продовжуються дослідження, започатковані в публікаціях [10, 11], які сприяють розв'язанню складнішої постановки задачі локалізації значення лінійної функції на комбінаторних конфігураціях перестановок з лінійними обмеженнями. Зокрема, в [10] розглянуто метод впорядкування значень цільової функції на множині перестановок, який дає можливість побудувати гамільтонів шлях у переставному многограннику, в статті [11] розглядається задача на графах із врахуванням повторень елементів перестановки. У даній статті

обґрунтовується і алгоритмізується підхід локалізації значення лінійної функції на перестановках з лінійними обмеженнями.

Основні поняття і означення

При розв'язанні комбінаторних задач часто використовуються такі добре відомі конструкції з елементів скінченної множини, як сполучення, розміщення, перестановки, розбиття тощо. Вже для цих простих комбінаторних конструкцій виникає необхідність формалізації їх визначення з метою уникнення словесних нагромадженнь і плутанини. З ускладненням конструкцій така необхідність стає все більш актуальною. Згадана формалізація може бути здійснена в більшості випадках через введення поняття конфігурації.

Означення 1. Нехай задано множини $X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ і нехай на множині Y задано строгий лінійний порядок: $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Відображення, яке задовольняє деякий комплекс обмежень, називається конфігурацією.

Комплекс обмежень, якому задовольняє відображення φ , визначає деякий клас конфігурацій та відповідних умов на комбінаторні конструкції в даній задачі [12–15].

Як відомо, типові характеристики об'єктів – це так звані первинні і вторинні специфікації відповідних їм відображень. Специфікації визначають склад елементів, що є образами відображення із врахуванням повторень цих елементів. Визначимо конфігурацію як однозначне відображення, таке, що задовольняє комплекс умов Λ , де Y – скінченна множина. Розглянемо конфігурації σ , для яких будь-які обмеження відсутні, тобто $\Lambda = \emptyset$.

Нехай σ – конфігурація, що є відображенням множини в множину $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Ця конфігурація може бути записана у вигляді

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_m} \end{pmatrix},$$

де $j = 1, 2, \dots, m$. Іноді зручно конфігурацію σ записувати у вигляді m -вимірного вектора з компонентами з A : $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m))$ або $\sigma = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$.

Розглянемо дві зв'язані між собою характеристики конфігурації σ – первинну і вторинну специфікації.

Вираз $[\sigma] = [a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}, \dots, a_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, називається первинною специфікацією конфігурації σ , якщо вектор $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ має α_j елементів a_j з множини $A \{j = 1, 2, \dots, n\}$. Число α_j називається a_j -показником первинної специфікації σ . Якщо в множині A елементи повторюються, тобто елемент a_i повторюється α_j раз, а для інших $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, то в результаті одержимо мультимножину A' образів відображення $\sigma: X \rightarrow A$. Склад елементів мультимножини A' однозначно визначається вектором $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$. Будемо говорити, що мультимножина A' має первинну специфікацію $[a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}, \dots, a_n^{\alpha_n}]$. Оскільки вектор, який відповідає конфігурації σ , можна розглядати як впорядковану мультимножину образів відображення σ , то первинні специфікації σ збігаються. При $m = n$ кожній конфігурації відповідають перестановки, і їх число становить $P(n) = n!$.

Нехай серед чисел $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, що визначають первинну специфікацію конфігурації $\sigma \in \beta_0$ нулів, β_1 одиниць, β_2 двійок і т.д. Тоді вираз

$$[\sigma] = [0^{\beta_0} 1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m}],$$

$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m = n$, $\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m$, називається вторинною специфікацією конфігурації σ .

Комбінаторна задача оптимізації

Як відомо, комбінаторні задачі на різних конфігураціях можна сформулювати так: є n -множина елементів, на якій задається скінченна множина комбінацій $A = (a_1, a_2, \dots, a_r)$. Під комбінаціями a_1, a_2, \dots, a_r можна розуміти перестановки, сполучення, різні послідовності тощо. На множині A задається функція $F(x)$. Необхідно знайти екстремум $F(x)$ (максимум або мінімум) і елементи множини A , які цей екстремум доставляють. Для розв'язання екстремальних комбінаторних задач слід здійснити такі операції: по-перше, треба розмістити множину значень функції $F(x)$, зуміти зробити їх перебір; по-друге, треба розвинути методику порівняння цих значень і виділення з них максимального або мінімального значення. Перша ж операція перебору практично рідко виявля-

ється здійсненою, оскільки число можливих комбінацій може бути дуже великим. Труднощі, пов'язані з перебором варіантів і порівнянням значень, досить значні. Як правило, для подальшого розв'язання таких задач здійснюється їх лінеаризація, тобто використовуються методи лінійного програмування.

Загальна схема зв'язку екстремальних комбінаторних задач з методами лінійного програмування полягає в тому, що елементи π_i інтерпретуються як точки евклідового простору, щоб "цільова" функція $F(x)$ стала лінійною формою. Розглядається задача знаходження екстремуму цієї функції на опуклій оболонці заданих точок (тобто на опуклому многограннику), хоч екстремум лінійної форми на многограннику досягається в одній із вершин, які входять у множину даних елементів. Задача ж знаходження екстремуму лінійної форми і є задачею лінійного програмування. Особливістю комбінаторних задач при такому зведенні залишиться те, що при знаходженні розв'язку слід обмежуватися лише точками з цілочисловими координатами.

Розглянемо наступну постановку комбінаторних екстремальних задач на перестановках. Розв'язком задачі є перестановка (a_1, a_2, \dots, a_n) чисел $1, 2, \dots, n$, одержана в результаті позначення вигляду $i \rightarrow a_i$ як $i \in N_n$. Потрібно знайти значення функції

$$F(x) = \text{extr} \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (1)$$

на скінченній множині вказаних перестановок P_n . Тоді, згідно з цим позначенням, функцію для даної перестановки p можна подати таким чином: $F(x) = (\bar{c}, x(p))$, де $x(p)$ – вектор змінних $(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \dots, x_{p(n)})$, а $p \in P_n$ – множина перестановок множини (x_1, x_2, \dots, x_n) , тобто перестановці множини $A = (1, 2, \dots, n)$ ставитися у відповідність вектор $p = (x_{p(1)}, x_{p(2)}, \dots, x_{p(n)})$.

Після цього задача (1) може бути записана у вигляді

$$Z(F(a), P_n(A)) : \max \{F(a) \mid a \in P_n(A)\}. \quad (2)$$

Як відомо, $M = \text{conv} P_n(A)$. Тоді X – непорожня множина в R^n , яка визначатиметься таким чином: $X = \text{vetr} M(A)$. Слід зазначити, що якщо елементи множини перестановки повторюються, то $P_n(A) = P_{nk}(A)$.

Задача може містити також додаткові лінійні обмеження, які утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ вигляду $D = \{x \in R^n \mid Gx \leq B\}$, де $G \in R^{m \times n}$, $B \in R^m$.

Запишемо лінійні обмеження у вигляді лінійних нерівностей:

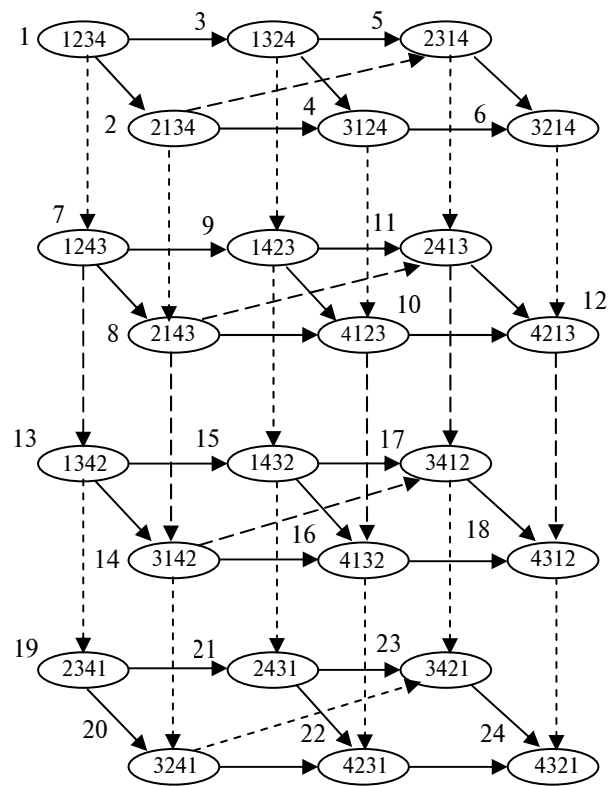
$$\begin{aligned} G_1(x) &\geq b_1, \\ G_2(x) &\geq b_2, \\ &\dots \\ G_k(x) &\geq b_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Для розв'язання задачі (2) і (3) розглянемо розкладання її на підзадачі: перетворимо кожен з нерівностей системи додаткових обмежень (3) в рівність $G_1(x) = \sum_{i=1}^m g_{ij}x_i = b_i$, $i \in N_m$, $j \in N_k$, і розглядатимемо знаходження точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ по значенню b_1 цільової функції на множині перестановок $P_{nk}(A)$.

Як відомо, максимального значення лінійна функція $f(x)$ на переставному многограннику $G(P_n)$ набуває в перестановці $(1, 2, \dots, n)$, а мінімального – в перестановці $(n, n-1, \dots, 2, 1)$. Для даної задачі $Z(F, X)$ -область допустимих розв'язків визначається переставним многогранником, граф якого описано в [10] і наведено на рисунку.

Слід сказати про властивості суміжності вершин. Вершини переставного многогранника $M(A)$, суміжні з вершиною $a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, мають вигляд $\beta = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$, де кожен з послідовностей (j_1, j_2, \dots, j_n) одержано з (i_1, i_2, \dots, i_n) в результаті перестановки таких індексів i_r і i_t , що $|i_r - i_t| = 1$, $a_{i_r} \neq a_{i_t}$. Ці властивості дають можливість розглядати многогранник перестановок як деякий граф, оскільки задача $Z(F, X)$ формулюється в термінах точок і зв'язків між ними, тобто в термінах графів.

З погляду на теорію графів, багато комбінаторних задач оптимізації мають таке формулювання: знайти серед деякої множини шляхів L мінімальний (або максимальний), тобто шлях, що має мінімальне (або максимальне) значення λ . Як множину L можна вибирати, наприклад, множину всіх гамільтонових шляхів.



Зображення графа переставного многогранника $P(A)$

Розглянемо теорему, яка дає можливість визначення мінімального і максимального шляхів серед всіх простих шляхів, що сполучають дві фіксовані вершини.

Теорема 1 [12]. Нехай деякий шлях, який сполучає вершину x рівня m і вершину x' рівня s , є мінімальним (максимальним). Тоді його підшлях між вершиною y рівня k і вершиною y' рівня p ($m \leq k < p \leq s$) також є мінімальним (максимальним).

Наведена теорема лежить в основі методу знаходження максимальних шляхів у графі без контурів. Оскільки задача $Z(F, X)$ розглядається на вершинах графа, то знаходження вершин розглядатимемо послідовно, починаючи з деякої початкової, всі вершини графа в порядку зниження значень цільової функції в цих вершинах і припишемо кожній вершині число, яке дорівнює мінімальному значенню функції $F(x)$. Для визначення мінімальних шляхів у графах, які мають контури, також існують різні методи. Розглянемо далі підхід до розв'язання задачі $Z(F, X)$ з додатковими лінійними обмеженнями.

Метод локалізації значення лінійної функції на комбінаторних конфігураціях перестановок

Позначимо вершину x_1 , яка визначає точку максимуму, початком шляху, з якої дуги тільки виходять. Тоді x_n – точка мінімуму, кінець шляху, в яку дуги тільки входять. Скористаємося теорією графів і розглянемо довільну вершину многогранника перестановок x . Довільна вершина переставного многогранника x і ребро u графа Γ інцидентні, оскільки вершина x є одним із кінців ребра u , тобто входить у пару вершин, що визначають ребро u . Тоді пара (x, y) визначатиме суміжні вершини. Враховуючи, що кожне ребро переставного многогранника інцидентно дорівнює двом вершинам графа, легко помічаємо, що сума ступенів всіх вершин графа дорівнює подвоєному числу його ребер, а граф многогранника перестановок можна визначити як гамільтонів. Гамільтонів граф, за визначенням, має містити в собі простий цикл, що проходить через кожну його вершину. Як приклад, комбінаторною задачею на множині перестановок і зв'язок її із знаходженням гамільтонового циклу найкоротшої сумарної довжини є відома задача про комівояжера.

Задача комівояжера є прикладом комбінаторної задачі на графах і має велике практичне та теоретичне значення. Через свою обчислювальну складність вона рівнозначна цілому класу переборних задач і часто використовується математиками для порівняльного аналізу та вивчення складності алгоритмів оптимізації в дискретній математиці.

Легко переконатися, що в повному графі порядку n існує рівно $(n-1)!$ гамільтонових циклів. Дійсно, зафіксувавши будь-яку з n вершин повного графа, з неї $(n-1)$ способами можна перейти в іншу – наступну, одержуючи простий ланцюг із двох вершин. Далі вибрати наступну вершину можна $(n-2)$ способами і т.д., одержуючи $(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = (n-1)!$ гамільтонових циклів. Оскільки $n! \approx a\sqrt{n}n^n e^{-n} = a\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$, то можна припустити,

що знаходження гамільтонових циклів пов'язане з величезним перебором варіантів. У даній статті пропонується підхід до розв'язання таких задач без перебору варіантів, що робить алгоритм ефективнішим і зручнішим.

Розглянемо приклад перестановки з повтореннями з множини $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Послідовності перестановок можна інтерпретувати як граф G_n , вершини якого відповідають всім точкам множини перестановок $P_{nk}(A)$ (див. рисунок).

Згідно з визначеними вище властивостями, дві вершини, що відповідають перестановкам x і y , сполучені ребром u тоді і тільки тоді, коли x утворюється з y одноразовою транспозицією сусідніх елементів. Таким чином, кожну вершину можна з'єднати в точності з $n-1$ іншими вершинами. Якщо перестановки з повтореннями, то також видно, що послідовність перестановок, утворена графом, відповідає гамільтоновому шляху в G_n , тобто шляху, що містить кожну вершину графа в точності один раз. Розбиття множини P_n на підмножини, які лежать у взаємно паралельних площинах, так само можливе [3], при якому початкову множину P_n можна розкласти на множини меншої розмірності, об'єднання яких породжує множину $P_n: P_n = \bigcup_{t=1}^k P_n^t$. У деяких випадках

важливо, щоб кожна подальша одержана підмножина якнайменше відрізнялася від попередньої. Послідовність підмножин можна проілюструвати на графі, вершини якого відповідають бінарним послідовностям довжини n і дві вершини якого сполучені ребром, якщо відповідні послідовності відрізняються в точності в одній позиції (див. рисунок). В такому графі побудована послідовність відповідає частковому гамільтоновому шляху. Опишемо алгоритм знаходження екстремальних значень цільової функції на основі методу поділу відрізка навпіл (методу дихотомії). Алгоритм полягає в тому, що знаходиться значення функції з використанням рисунка шляхом поділу навпіл гіперплощин A, B, C, D , тобто при використанні методу дихотомії.

Алгоритм

Початковий крок. Задаємо елементи множини перестановок a_1, a_2, \dots, a_n (за означенням впорядковані так: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$), а також коефіцієнти цільової функції c_1, c_2, \dots, c_n .

Крок 1. Упорядковуємо коефіцієнти цільової функції $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n, i \in N_n$.

Крок 2. Визначаємо мінімальні і максимальні значення цільової функції: $f(x_{\min}^*)$, $f(x_{\max}^*)$ і покладаємо $q = 0$.

Крок 3. Вибираємо додаткове обмеження, покладаючи $q = q + 1$; якщо $q = k$, тобто всі обмеження вибрані, то переходимо на крок 10. Інакше, задаємо коефіцієнти додаткового обмеження q : g_{ij} , $i \in N_m$, $j \in N_k$, $q = q + 1$, $i := k - i$. Будуємо решітки для перетворення індексів коефіцієнтів:

$$u_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \Rightarrow u_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Перетворюємо додаткове обмеження: $\tilde{g}_{ij}(x) = u_i g_{ij}(x) \geq b_i$.

Крок 5. Визначаємо $\tilde{g}_k(x_{\max}^*) = \max$, $\tilde{g}_k(x_{\min}^*) = \min$.

Крок 6. Знаходимо значення функції додаткового обмеження в точках $h_{i_{left}}$, які визначають максимум значень функції $\tilde{g}_k(x)$ на кожній гіперплощині, де розміщені точки переставного многогранника (див. рисунок).

Крок 7. Порівнюємо виконання обмежень $\tilde{g}_q(x) \geq b_q$; якщо умова виконується, то запам'ятовуємо $h_{i_{left}}$ і переходимо на наступний крок 8. Інакше, на крок 9.

Крок 8. Знаходимо значення функції – додаткового обмеження в точках $h_{i_{left}}$ (точки, які визначають мінімум значення $\tilde{g}_k(x)$ на кожній гіперплощині). Ділимо відрізок, який визначається точками $h_{i_{left}} \leq g_q(x) \leq h_{i_{right}}$ на кроці 6, 7 навпіл і одержуємо точку \bar{x}^* . Переходимо на наступний крок.

Крок 9. Перевіряємо виконання перетвореного додаткового обмеження $g_k(x) \geq b_k$, підставивши значення точки з множини пере-

становок P_n . Якщо нерівність виконується, то запам'ятовуємо потрібний відрізок $[\bar{x}^*, h_{\min}^*]$ або $[h_{\max}^*, \bar{x}^*]$. Перевіряємо виконання умови $q = k$; якщо вона виконується, то переходимо на крок 3. Інакше, на наступний крок.

Крок 10. Для всіх додаткових обмежень шукаємо загальний відрізок і визначаємо мінімум або максимум цільової функції $f(x)$. Задача розв'язана, якщо значення цільової функції розміщуються в точках на перетинах і визначають загальну область. Інакше, задача не розв'язна.

Оскільки число вершин графа $G(P_n)$ перестановок дорівнює $n!$, то теоретична оцінка алгоритму, враховуючи застосування в ньому методу дихотомії, становить $lq_2N = lq_2 + \dots + \dots + \dots = N$.

Висновки

Досліджені складні задачі з лінійною цільовою функцією і додатковими лінійними обмеженнями на комбінаторній конфігурації перестановок можуть бути застосовані для моделювання прикладних задач на різних комбінаторних конфігураціях. Розглянуті і встановлені деякі важливі властивості допустимої області евклідової задачі комбінаторної оптимізації на конфігурації перестановок можна використовувати для покращення існуючих методів розв'язання таких задач та побудови нових. Побудований і обґрунтований метод локалізації лінійної функції на множині перестановок за наявності додаткових обмежень дає можливість розв'язати ряд подібних задач.

Подальший розвиток даного дослідження буде направлений на реалізацію і адаптацію сформульованого методу, а також на розробку нових методів розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач із врахуванням вхідних даних на інших комбінаторних конфігураціях.

Л.Н. Колечкина

МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача на графах с учетом свойств множества перестановки как области допустимых решений задачи. Обосновывается и алгоритмуется подход локализации значения

L.M. Kolechkina

THE LOCALIZATION METHOD OF THE LINEAR FUNCTION VALUE ON TRANSPOSITIONS WITH LINEAR LIMITATIONS

The paper considers the task on columns taking into account the properties of a great number of transpositions as domains of possible solutions of this task. We prove and algorithmize the localization

линейной функции на комбинаторном множестве перестановок. Рассмотрен метод упорядочения значений целевой функции на множестве перестановок, который дает возможность найти решения задачи линейной функции на перестановках с линейными ограничениями.

method of the linear function value on a combinatorial set of transpositions. We also study the method of values organization of the efficiency function on a great number of transpositions that makes it possible to find the solutions of the task of linear function on transpositions with linear limitations.

1. Сергиенко И.В., Каспицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения и исследования. – К.: Наук. думка, 2003. – 260 с.
3. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 266 с.
4. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. – М.: Физматлит, 2004. – 238 с.
5. Ємець О.О., Колечкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
6. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158–172.
7. Донец Г.А., Шулинок И.Э. О сложности алгоритмов поиска в глубину на модульных графах // Теорія оптимальних рішень. – 2002. – № 1. – С. 105–110.
8. Донец Г.А. Алгоритмы раскраски плоских графов // Там же. – 2006. – № 5. – С. 134–143.
9. Донец Г.А., Самер И.М. Альшаламе. Решение задачи о построении линейной мозаики // Там же. – 2005. – № 4. – С. 15–24.
10. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 50–61.
11. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах // Упр. системы и машины. – 2009. – № 4. – С. 35–41.
12. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 308 с.
13. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 214 с.
14. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
15. Стенли Р. Перечислимая комбинаторика. – М.: Мир, 1990. – 440 с.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
9 жовтня 2009 року