

УДК 519.8

МІНІМАКСНА ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ НА ФІКСОВАНІ ПОСАДКОВІ МІСЦЯ

С.І. Яремчук, к.ф.-м.н, професор

В.О. Таценко, аспірант

О.А. Шупіков, магістр

*Житомирський державний технологічний університет
yaremchuk_s@mail.ru, vatatsenko@gmail.com, leshashup@mail.ru*

В статті розглядається задача розміщення джерел фізичного поля на фіксовані місця. Побудовано математичні моделі задачі в зручному для її розв'язання вигляді та відповідні методи розв'язання. Проведено порівняння часу та точності роботи цих методів.

Yaremchuk S.I., Tacenko V.O., Shupikov O.A.. The minimax problem of placement of physical source fields on the fixed seats. The article considers the problem of placement of physical source fields on the fixed seats. A mathematical model of the problem in a convenient for resolving form and appropriate methods of solving was built. Were made comparisons of time and accuracy of these methods .

Ключові слова: МІНІМАКСНА ЗАДАЧА, ДЖЕРЕЛА ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ, Р-АЛГОРИТМ, ЛЕНД І ДОЙГ.

Keywords: MINIMAX PROBLEM, SOURCES OF PHYSICAL FIELDS, P-ALGORITHM, LAND AND DOIG.

На практиці часто виникають задачі розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця. Наприклад, при проектуванні механічних конструкцій, які піддаються впливу силових джерел (пошук найвигіднішого розподілення навантажень на будівельні конструкції для уникнення їх руйнації); при синтезів блоків мікроелектронної апаратури (створення потрібного температурного режиму елементів конструкції), тощо.

Змістовна постановка задачі.

Нехай в деякій області Ω розміщено N фіксованих посадкових місць та K контрольних точок. На посадкові місця необхідно розмістити N джерел фізичного поля з заданими інтенсивностями таким чином, щоб максимальне із значень фізичного поля в контрольних точках було мінімальним. Кожне джерело фізичного поля може бути призначене тільки на одне посадкове місце і на кожне посадкове місце може бути призначене лише одне джерело.

Вперше ця постановка та наступна математична були зроблені Стояном Ю.Г. та Путятінін В.П. [1].

Математична постановка

Фізичне поле, що утворюється джерелами і крайовими умовами описується наступною задачею математичної фізики:

$$Lu = f(y, Z), \quad (1)$$

$$B_j u = \varphi, \quad j \in [1: J], \quad (2)$$

$$f(y, Z) = \begin{cases} A^i(y - Z^i), & \text{якщо } y \in D_i \\ 0, & \text{якщо } y \in \bigcup_{i=1}^N D_i \end{cases} \quad (3)$$

Функція цілі має наступний вигляд

$$f(Z) = \max_{k \in [1: K]} u(y^k, Z) \quad (4)$$

де $y^k \in \Omega, k \in [1: K]$ – контрольні точки, вектор $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^N)$

визначає розміщення всіх джерел, а Z^i – положення i -го джерела та співпадає з координатами його полюсу $p^i, i \in [1: N]$.

Для розв'язання цієї задачі було побудовано метод, названий гібридним, в якому використовувались: метод випадкового пошуку Монте-Карло; метод околів, що звужуються та метод вектору спаду. Основним недоліком цього методу є дуже низька швидкість збіжності (розв'язання крайової задачі займає багато часу, а в даному алгоритмі воно неодноразово виконується на кожній ітерації кожного з трьох зазначених методів). Тобто, навіть при невеликій розмірності задачі, час її розв'язання був дуже великим, що зумовило

актуальність побудови математичних моделей та методів, що дозволили б розв'язувати задачі з більшою розмірністю за прийнятний час.

Побудовані математичні моделі

Керовані змінні:

$$X_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i - \text{те джерело не призначається на } j - \text{те місце} \\ 1, \text{ якщо } i - \text{те джерело призначається на } j - \text{те місце} \end{cases}$$

Обмеження:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N x_{ij} = 1, \quad j \in [1 : N] \\ \sum_{j=1}^N x_{ij} = 1, \quad i \in [1 : N] \end{cases} \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in [1 : N] \quad j \in [1 : N] \quad (6)$$

Функція цілі:

$$f(x) = \max_{k \in [1 : K]} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^k x_{ij}, \quad (7)$$

де c_{ij}^k – вклад i -того джерела, що знаходиться на j -тому посадковому місці в значення поля в k -тій контрольній точці.

Отримана модель є мінімаксною задачею лінійного програмування з булевими змінними.

Застосувавши ідею Зойтендейка, отримаємо другу математичну модель цієї ж задачі у вигляді задачі лінійного програмування з булевими змінними частково цілочисельної:

$$z \rightarrow \min \quad (8)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_{ij} c_{ij}^k \leq z, \quad k \in [1 : K] \\ \sum_{i=1}^N x_{ij} = 1, \quad j \in [1 : N] \\ \sum_{j=1}^M x_{ij} = 1, \quad i \in [1 : N] \end{cases} \quad (9)$$

$$x_{ij} \geq 0, i \in [1 : N], j \in [1 : N] \quad (10)$$

Для розв'язання (5) – (7) було побудовано метод «Р-алгоритм» [2]. Для розв'язання (8) – (10) – модифікації методу Ленд і Дойг [3].

Порівняння методів

В роботі виконано порівняння описаних методів на наборі задач з розмірністю до 20 джерел та до 20 контрольних точок. Отримано наступні результати. За швидкодією: метод Р-алгоритм виявився на порядок швидшим ніж інші, модифікація методу Ленд і Дойг з використанням симплекс методу виявилась на 15% швидшою за модифікацію з використанням методу внутрішньої точки.

Паралельні обчислення

Наведені методи були програмно реалізовані з використанням технології MPI (бібліотека mpich-3.2 C++). Обчислювальний експеримент показав, що використання паралельних обчислень збільшило ефективність метода Р-алгоритм на 15%, модифікацій методів Ленд і Дойг на 50%. Причому максимальний приріст ефективності досягався при одночасному збільшенні розмірності задачі та кількості обчислювальних процесів.

Література

1. Стоян Ю. Г. Размещение источников физических полей / Стоян Ю. Г., Путятин В. П. – Киев: Наук. думка, 1981. – 186 с.
2. С. І. Яремчук Модифікація методу "Р-алгоритм" / С.І. Яремчук, К.О. Скок, В.О. Таценко // Інформатика та системні науки: Матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю. - Полтава, 2016. - С. 339 - 342.
3. С. И. Яремчук Модификация метода Ленд и Дойг решения минимаксной задачи размещения источников физического поля / С. И. Яремчук, В.А. Таценко, А.А. Шупиков // Материалы 5-й международной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии»(Кишиневу 22-25 марта 2016 г.)Кишиневу: – С. 396-402