УДК 519.85

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ К ОДНОЭКСТРЕМАЛЬНЫМ

А. И. Косолап, *д. ф.-м. н., профессор*
Украинский государственный химико-технологический университет, anivkos@ua.fm

В работе рассматриваются многоэкстремальные задачи. Точной квадратичной регуляризацией такие задачи преобразуются к максимуму нормы вектора на выпуклом множестве. Найдены условия при которых полученная задача преобразуется к одноэкстремальной.

Kosolap A. I. In this paper we consider the multiextreme problems. Exact quadratic regularization such problems will be transformed to a maximum of norm a vector on convex set. Conditions are found at which received problem will be transformed to the one-extreme.

Ключевые слова: МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ТОЧНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ, КРИВИЗНА ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ.
Keywords: MULTIEXTREME PROBLEMS, EXACT QUADRATIC REGULARIZATION, CURVATURE OF THE CONVEX HYPERSURFACE.

Широкий класс многоэкстремальных задач при помощи точной квадратичной регуляризации преобразуется к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве [1]. Несмотря на то, что преобразованная задача также является многоэкстремальной, для некоторых выпуклых множеств она преобразуется к одноэкстремальной. Такими выпуклыми множествами являются прямоугольные параллелепипеды, многогранники, пресечение шаров и некоторые другие. В работе предлагаются дополнительные преобразования, позволяющие преобразовывать многоэкстремальные задачи к одноэкстремальным.

Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим следующую многоэкстремальную задачу

$$\max\{\|x\|^2 \mid x \in S\}, \quad (1)$$

где S – выпуклое ограниченное множество. Ниже приводится несколько новых результатов, при которых задача (1) преобразуется к одноэкстремальной.

Лемма 1. *Пусть x^1 и x^2 два локальных максимума в задаче* (1), *где выпуклое множество $S \subseteq E^n_+$, тогда функция $\|x\|^2$ достигает минимума на любой выпуклой дуге $G(x^1, x^2)$ выпуклой поверхности S, соединяющей точки x^1 и x^2.*

Доказательство. Из определения локального максимума следует, что функция $\|x\|^2$ убывает в любом направлении от точек x^1 и x^2 в их окрестности. Если, начиная с точки x^0 дуги $G(x^1, x^2)$ в направлении от x^1 к x^2 функция $\|x\|^2$ начнет возрастать, то x^0 – точка минимума функции $\|x\|^2$. Если же вдоль дуги $G(x^1, x^2)$ в направлении от x^1 к x^2 функция $\|x\|^2$ монотонно убывает, то в окрестности точки x^2 вдоль дуги $G(x^1, x^2)$ (от точки x^2 к x^1) функция $\|x\|^2$ будет возрастать. Но это противоречит тому, что x^2 – точка локального максимума. Противоречие доказывает лемму.

Определение. Пусть x^0 – точка на выпуклой поверхности S. Каждая точка x^i поверхности S в окрестности x^0 определяет кривую минимальной длины на этой поверхности. Тогда минимальное значение кривизны кривой (x^0, x^i) в точке x^0 $\forall i$ будем называть минимальной кривизной выпуклой гиперповерхности S в точке x^0.

Лемма 2. *Пусть в каждой точке x^i выпуклой поверхности S ее минимальная кривизна больше кривизны шара* $\{x \mid \|x\|^2 \le \|x^i\|^2\}$, *тогда задача* (1) *является одноэкстремальной*.

Доказательство. Допустим противное, что задача (1) имеет два локальных максимума в точках x^1 и x^2. Соединим эти дуги кривой минимальной длины на поверхности S. Тогда из леммы 1 следует, что на этой кривой должна быть точка минимума функции $\|x\|^2$. Но в точке минимума кривизна кривой будет меньше кривизны шара. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть k_1 и k_2 – минимальные кривизны выпуклых гиперповерхностей S_1 и S_2 соответственно, тогда минимальная кривизна k их пересечения удовлетворяет условию* $k \ge \max\{k_1, k_2\}$.

Доказательство. Пусть x – точка пересечения гиперповерхностей S_1 *и* S_2, причем $k_2 \ge k_1$, тогда любая кривая, проходящая через x и принадлежащая $S_1 \cap S_2$ будет принадлежать поверхности S_2. Но минимальная кривизна такой кривой равна k_2, поэтому $k \geq \max\{k_1, k_2\}$.

Будем обозначать через $S(x - h)$ сдвиг выпуклого множества S вдоль биссектрисы положительного ортанта на величину $h > 0$.

Теорема 1. *Пусть минимальная кривизна выпуклой поверхности S больше нуля, тогда существует такое* $h > 0$, *что задача*

$$\max\{\|x\|^2 | x \in S(x - h),\ x \geq h\} \tag{2}$$

будет одноэкстремальной.

Доказательство. При увеличении значения h минимальная кривизна поверхности S не меняется, а поверхности шара будет убывать при увеличении его радиуса. Следовательно, существует такое $h > 0$, для какого кривизна шара будет меньше минимальной кривизны S в каждой ее точке. Тогда в соответствии с леммой 2 задача (2) будет одноэкстремальной.

При смещении допустимой области задачи (1) она преобразуется точной квадратичной регуляризацией к эквивалентной задаче

$$\max\{\|z\|^2 | x \in S_0 \cap S(x - h)\}, \tag{3}$$

где

$$S_0 = \{z | -\|x - h\|^2 + s + 2\|z\|^2 \leq d\},$$

где s – константа, а $z = (x, x_{n+1})$.

Теорема 2. *Пусть задача* (1) *одноэкстремальная, тогда множество* $S(x - h)$ *выпуклое на поверхности выпуклого множества* S_0.

Доказательство. Если задача (1) одноэкстремальная, то и задача

$$\max\{\|x + h\|^2 | x \in S\} \tag{4}$$

одноэкстремальная. Это следует из того, что после замены $z = x + h$ задача (4) принимает вид

$$\max\{\|z\|^2 | x \in S(z - h)\},$$

которая является одноэкстремальной для $h > 0$. Одноэкстремальность в задаче (4) означает, что линии уровня ее целевой функции делят допустимую область на две части. Так как поверхность S_0 совпадает с линиями уровня функции $\|x + h\|^2$ при любом фиксированном значении x_{n+1}, то эта поверхность также будет делить допустимую область на две части (допустимая область не зависит от переменной x_{n+1}). Таким образом, множество $S(x - h)$ связно на поверхности выпуклого множества S_0. Покажем, что оно будет выпуклым. Пусть две точки x^1 и x^2 принадлежат этому множеству, тогда отрезок $[x^1, x^2]$ будет принадлежать пересечению выпуклых множеств S и S_0, а его проекция на S_0 также будет допустимой. Это означает, что множество $S(x - h)$ выпукло на поверхности выпуклого множества S_0.

Теорема 3. *Пусть* x^* *- решение задачи* (1), *задача* (2) *одноэкстремальна и* $x^* + h$ *ее решение, тогда и задача* (3) *также одноэкстремальна.*

Доказательство. Достаточно показать, что точка $x^* + h$ удовлетворяет ограничениям задачи (3). Учитывая, что

$$s \geq 2\|x^*\|^2 + 2\|h\|^2$$

и

$$d = 3(\|x^* + h\|^2 + x_{n+1}^2$$

получаем для второго ограничения задачи (3)

$$\|x^* + h\|^2 + x_{n+1}^2 - 2\|h\|^2 + 2\|x^*\|^2 + 2\|h\|^2 + x_{n+1}^2 \leq 3(\|x^* + h\|^2 + x_{n+1}^2),$$

Откуда

$$-\|x^* + h\|^2 + 2\|x^*\|^2 \leq 0.$$

Таким образом, точка $x^* + h$ удовлетворяет ограничениям задачи (3). Теорема доказана.

Выводы. При использовании точной квадратичной регуляризации [1] общая задача нелинейной оптимизации преобразуется к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Показано, что во многих случаях такая задача преобразуется к одноэкстремальной. Для решения одноэкстремальных задач эффективным является прямо-двойственный метод внутренней точки [2].

Литература

1. Косолап, А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А. И. Косолап – Днепропетровск: ПГАСА, 2015 – 164 с.
2. Nocedal J., Wright S. J. Numerical optimization. Springer, 2006. 685 p.