**УДК 519.1**

# ЗАДАЧА ПОШУКУ ТРЬОХ ТА ЧОТИРЬОХ АКТИВНИХ КУЛЬ СЕРЕД МАСИ ПОДІБНИХ

***Г. П. Донець***, *д. ф.-м. н., професор*
*Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України*
*g_donets@mail.ru*

*Досліджена загальна функція пошуку для трьох та чотирьох радіоактивних куль серед множини подібних. Одержані результати для деяких значень кількості елементів.*

*Donets G. P. Problem of search for the three and four active spheres among a number of similar ones. General search function for finding three and four radioactive balls among a set of similar ones has been studied. Specific results for some initial values of the total amount of balls have been obtained.*

.

*Ключові слова*: ГРАФ, ВИБІРКА, ЕСКАЛАЦІЯ ФУНКЦІЇ.
*Keywords:* GRAF, SAMPLE, ESCALATION FUNCTION.

**Вступ.** Ця задача з'явилася вперше в 1966 році на Московській математичній олімпіаді у двох варіантах.

Варіант 1. З 19 більярдних куль дві радіоактивні. Про будь-який набір куль за одну перевірку можна довідатися чи є в ньому хоча б одна радіоактивна (але не можна довідатися скільки їх). Довести, що за 8 перевірок можна виявити радіоактивну пару куль.

Варіант 2. В умовах задачі варіанта 1 довести, що дві радіоактивні кулі серед 11 можна знайти за 7 перевірок.

Ці задачі так і не були розв’язані. Розглянемо більш конкретну задачу. Нехай задано $n$ більярдних куль, серед яких дві кулі радіоактивні (далі активні). Необхідно їх виявити за мінімальне число перевірок.

Очевидно, що така задача може виникнути в різних практичних напрямках. І в тих ситуаціях, де кожна перевірка пов'язана з істотними матеріальними втратами, така задача є важливою й актуальною.

Сформулюємо загальні принципи, які застосовуються при розв’язуванні подібних задач [1-5].

1. Якщо з $2^s$ куль радіоактивна одна, то її можна знайти за $s$ перевірок: на першому кроком перевірити половину куль, потім методом дихотомії перевірити ту множину куль, де знаходиться активна куля.

2. Якщо куль більше, ніж $2^s$, то за $s$ кроків не можна забезпечити відшукання однієї активної кулі. Припустимо противне. Зробимо $s$ випробувань, відзначаючи наявність радіоактивності плюсом, а її відсутність – мінусом. За припущенням, знаючи послідовність знаків, що виникає при перевірці, ми можемо сказати, яка з куль активна. Але різних послідовностей довжини $s$ із двох знаків існує всього лише $2^s$. Вказавши у кожній із них активну кулю, отримаємо нелогічний висновок про те, що ті кулі, яким не відповідає ніяка послідовність знаків, не можуть бути активними.

3. Якщо з $n$ куль активні 2, то є $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ варіантів різних активних пар. Тому, якщо $\frac{n(n-1)}{2} > 2^s$, то за $s$ випробувань не вдасться знайти активну пару.

4. Якщо з $n$ куль першим кроком випробовуємо $k$ куль, то результат випробуванню «–» відповідає $C_{n-k}^2$ варіантів (обидві активні кулі перебувають серед $n-k$, що залишилися), а результат «+» – іншим $C_n^2 - C_{n-k}^2$ варіантам. Якщо в розпорядженні залишилося тільки $i$ випробувань, то обов'язково повинне бути $C_{n-k}^2 \le 2^i$ і $C_n^2 - C_{n-k}^2 \le 2^i$.

5. Якщо за $s$ перевірок удалося найти розв’язок для $n$ куль, то для меншої кількості куль можна знайти розв’язок також за $s$ перевірок. Це випливає з тих міркувань, що той же результат можна досягти, якщо доповнити множину

куль до числа $n$ фіктивними (неактивними) кулями. Це означає, що для двох однакових значень $s$ і різних значень $n$ для всіх проміжних значень кількості куль задача розв’язується за ті ж $s$ перевірок.

Задача пошуку трьох та чотирьох активних куль значно складніша від подібної задачі для двох куль, але для свого розв’язання вона повністю використовує досягнення останньої. По аналогії з нею введемо необхідні позначення:

$f_3(n)$, $f_4(n)$ – мінімальна кількість спроб для виявлення відповідно трьох і чотирьох активних куль серед $n$ заданих.

$h_3(k^+, n-k)$, $h_4(k^+, n-k)$ – мінімальна кількість спроб для виявлення відповідно трьох і чотирьох активних куль серед $n$ заданих після того, як перевірка $к$ куль дала позитивний результат.

$r_3(k^+, l^+, n-k-l)$, $r_4(k^+, l^+, n-k-l)$ – мінімальна кількість спроб для виявлення відповідно трьох і чотирьох активних куль серед $n$ заданих після того, як перевірка послідовно $к$, потім $l$ куль дала позитивний результат.

Якщо з $n$ куль активні 3, то є $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ варіантів різних активних трійок. Тому, якщо $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} > 2^s$, то за $s$ випробувань не вдасться знайти активну трійку.

Якщо з $n$ куль на першому кроці випробовуємо $k$ куль, то результат випробування «–» відповідає $C_{n-k}^3$ варіантів (три активні кулі перебувають серед $n-k$, що залишилися), а результат «+» – іншим $C_n^3 - C_{n-k}^3$ варіантам.

Якщо в розпорядженні залишилося тільки $i$ випробувань, то обов'язково повинно бути $C_{n-k}^3 \le 2^i$ і $C_n^3 - C_{n-k}^3 \le 2^i$.

Для обчислення функцій $f_3(n)$ та $f_4(n)$ найкращою стратегією, як показав досвід, є індуктивний метод, коли загальна задача з даною кількістю активних куль зводиться до задачі з меншою кількістю куль.

### Обчислення функції $f_3(n)$

Безпосередньо переконуємося, що $f_3(n) = n -1$ для $4 \le n \le 9$. Очевидно, що $h_3(2^+, k) = 1 + f_2(\kappa+1)$. Тому для $f_3(10)$ беремо та робимо перше випробування двох куль <2>. Якщо отримаємо результат «–», то тоді маємо $f_3(8) = 7$, а якщо результат випробовування буде «+», то тоді отримаємо $h_3(2^+, 8) = 1 + f_2(9) = 7$. В обох випадках маємо $f_3(10) = 8$.

Для 11 куль недостатньо 8 випробувань, та дуже легко довести, що $f_3(11) = 9$. Для цього беремо одну кулю. Якщо отримаємо результат випробовування буде «–», то $f_3(10) = 8$, а якщо результат буде «+», то (див. вище) $f_2(10) = 6$. Сумуючи обидва випадки, маємо $f_3(11) = 9$.

Досить легко показати, що три активні кулі з 12-и можна знайти за 9 випробувань, тобто довести, що $f_3(12) = 9$. Для цього на першому кроці візьмемо 2 кулі. Якщо отримаємо результат «–», то $f_3(10) = 8$, а якщо буде «+», то справедлива рівність $h_3(2^+, 10) = 1 + f_2(11) = 1 + 7 = 8$. В підсумку отримаємо рівність $f_3(12) = 9$.

Для 13 куль на першому кроці для перевірки беремо 3 кулі. Якщо отримаємо результат «–», то тоді $f_3(10) = 8$, а в сумі отримаємо 9 випробовувань.

Якщо на першому кроці отримаємо результат «+», то приходимо до функції $h_3(3^+, 10)$. Доведемо, що $h_3(3^+, 10) = 8$. Для цього на другому кроці беремо наступні 4 кулі. Якщо результат перевірки буде «+», то за третій та четвертий кроки серед них знайдемо одну активну кулю, що приведе до функції $h_3(3^+, 9)$. А це означає, що за 5 кроків можна знайти всі активні кулі ( $h_3(3^+, 9) = 5$).

Якщо на другому кроці отримаємо результат «–», то тоді приходимо до функції $h_3(3^+, 6)$. У цьому випадку на третьому кроці беремо для перевірки 2 кулі з 6-и. Якщо отримаємо результат «+», то тоді на четвертому кроці знайдемо хоча би одну серед них активну і прийдемо до функції $h_3(3^+,5)$, а як відомо, $h_3(3^+,5) = 5$.

Якщо отримаємо результат «–», то приходимо до функції $h_3(3^+,4)$, яку можна прирівняти до функції $f_3(7)$, що, як відомо, $f_3(7) = 6$. В усіх розглянутих випадках отримаємо, що $f_3(13) = 9$.

Для 14 куль вже 9 випробувань не достатньо. Доведемо, що $f_3(14) = 10$.

Для цього беремо для перевірки одну кулю. Якщо отримаємо результат «–», то тоді $f_3(13) = 9$, а якщо результат буде «+», то тоді дві активні кулі серед 13-и легко знаходяться за $f_2(13) = 7$ випробовувань.

Сумуючи обидва випадки, маємо результат $f_3(14) = 10$.

Досить легко отримати результат знаходження 3-х активних куль серед 15-и заданих і показати, що $f_3(15) =10$.

Для цього візьмемо для перевірки 2 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_3(13) = 9$, а якщо отримаємо результат «+», то тоді справедливе співвідношення $h_3(2^+,13) = 1 + f_2(14) = 8$. В підсумку маємо, що 3 активні кулі серед 15-и можна знайти за 10 кроків, тобто $f_3(15) = 10$.

Для 16 куль на першому кроці  для перевірки беремо 3 кулі. Якщо отримаємо результат «–», то $f_3(13) = 9$, а якщо результат буде «+», то тоді на другому кроці беремо наступні 4 кулі. Якщо результат буде «+», то за третій та четвертий кроки знаходимо серед них одну активну, що приводе до функції $h_3(2^+,13)$, а, як відомо, $h_3(2^+,13) = 6$.

Якщо результат другого кроку буде «–», то тоді приходимо до функції $h_3(3^+,9)$, яка покривається функцією $h_3(3^+,10)$ і, як було показано раніше, $h_3(3^+,10) = 8$. В усіх варіантах отримуємо, що $f_3(16) = 10$.

Для 17 куль 10 випробувань вже недостатньо. Легко довести, що для 17-и куль $f_3(17) = 11$. Для цього, знову ж таки, беремо одну кулю. Якщо отримаємо результат «–», то тоді (див. вище) $f_3(16) = 10$, а якщо результат буде «+», то тоді 2 активні кулі з 16 отримаємо за $f_2(16) = 8$

випробовувань. В обох випадках в сумі отримаємо, що $f_3(17) = 11$.

Досить легко отримати число випробовувань для знаходження 3-х активних куль серед 18-и та показати, що $f_3(18) = 11$. Для цього на першому кроці для перевірки візьмемо 2 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді 3 активні кулі знайдемо за $f_3(16) = 10$ випробовувань, а якщо отримаємо результат перевірки «+», то справедливе співвідношення $h_3(2^+,16) = 1 + f_2(17) = 9$. В підсумку отримаємо, що $f_3(18) = 11$.

Покажемо, що і серед 19-и куль 3 активні можна знайти за 11 випробовувань, тобто, що $f_3(19) = 11$. Для цього на першому кроці беремо 3 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_3(16) = 10$, і в сумі отримаємо 11 перевірок.

А якщо результат перевірки на першому кроці буде «+», то приходимо до функції $h_3(3^+,16)$. Доведемо, що $h_3(3^+,16) = 10$. Для цього на другому кроці беремо наступні 4 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «+», то за третій та четвертий кроки знаходимо серед них хоча би одну активну, що приводить до функції $h(3^+,15)$. Дві інші активні кулі отримаємо за $h(3^+,15) = 6$ перевірок. А в сумі отримаємо 10 перевірок.

Якщо на другому кроці отримаємо результат «–», то тоді приходимо до функції $h_3(3^+,12)$. Далі поступаємо наступним чином.

На третьому кроці беремо для перевірки 4 кулі з 12-ти. Якщо отримаємо результат «+», то на четвертому та п’ятому кроках знаходимо одну з них активну. Дві інші активні кулі отримаємо за $h(3^+,11) = 6$ перевірок. А в сумі отримаємо 10 перевірок.

Якщо на третьому кроці отримаємо результат «–», то приходимо до функції $h_3(3^+,8)$, яка покривається функцією $h_3(3^+,10)$ і, як було показано раніше, $h_3(3^+,10) = 8$. В усіх розглянутих випадках отримаємо $f_3(19) = 11$.

Покажемо, що і серед 20-и куль 3 активні можна знайти за 11 випробовувань, тобто, що $f_3(20) = 11$.

Для цього на першому кроці з 20-и беремо для випробовування 4 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то три активні кулі можна отримати за $f_3(16) = 10$ перевірок. Якщо результат перевірки 4-х куль буде «+», то тоді на другому кроці беремо 7 наступних куль. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то три активні кулі можна отримати за $f_3(13) = 9$ перевірок. Якщо результат перевірки буде «+», то за третій і четвертий кроки отримаємо з 4-ох куль одну активну і прийдемо до функції $h(7^+,12)$. В такому разі дві інші активні кулі отримаємо за $h(7^+,12) = 7$ перевірок. А в сумі отримаємо 11 перевірок, тобто це означає, що $f_3(20) = 11$.

Таким же чином можна встановити, що $f_3(20+\kappa) = 12$ для $1 \le \kappa \le 4$. Це досягається наступним шляхом. На першому кроці перевіряємо $\kappa$ куль Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_3(20) = 11$, а якщо результат буде «+», то за другий і третій кроки отримаємо з $\kappa$ куль одну активну і з решти дві активних кулі отримаємо за $f_2(20+\kappa-1) \le 9$ кроків, що і приводить до шуканого результату.

Легко показати, що $f_3(25) = 12$. Для цього на першому кроці беремо 5 куль. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_3(20) = 11$, а якщо результат буде «+», то на другому кроці беремо для перевірки 8 наступних куль. Якщо результат перевірки буде «+», то за третій, четвертий і п’ятий кроки знаходимо серед них одну активну кулю. Така ситуація приводить до функції $h(5^+,19)$. А це означає, що дві інші активні кулі можна знайти за $h(5^+,19) = 7$ кроків.

Якщо результат перевірки отримаємо «–», то тоді приходимо до функції $h(5^+,12)$. У цьому випадку на третьому кроці беремо для перевірки одну кулю з п’яти. Якщо отримаємо результат «+», то дві активні кулі знайдемо за 8 кроків з решти 16-и. А якщо результат перевірки однієї кулі з 5-и отримаємо «–», то за четвертий і п’ятий кроки знаходимо серед чотирьох одну активну, а дві інші активні кулі можна знайти серед 15-и (12+3) останніх за $f_2(15) = 7$ випробовувань.

## Обчислення функції $f_4(n)$

Для чотирьох куль застосовуємо ті ж самі прийоми. Безпосередньо переконуємося, що $f_4(n) = n–1$ для $5 \le n \le 12$. Очевидно, що по аналогії $h_4(2^+, k) = 1 + f_3(\kappa+1)$. Тому для $f_4(13)$ здійснюємо перше випробування, взявши для перевірки 2 кулі, тобто здійснюємо <2>. Якщо результат перевірки отримаємо «–», то тоді $f_4(11) = 9$, а якщо результат перевірки отримаємо «+», то тоді $h_4(2^+,11) = 1 + f_3(12) = 10$.

В обох випадках маємо, що $f_4(13) = 11$.

Для 14 куль не вистачає 11 випробувань, а 12 достатньо. Це легко отримати, якщо для перевірки на першому кроці взяти одну кулю. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_4(13) = 11$, а якщо буде «+», то $f_3(13) = 9$, що і дає бажаний результат.

Для 15 куль також справедливо $f_4(15) = 12$, що доводиться наступним шляхом. Будемо відмічати відповідну функцію нижнім індексом, що дорівнює кількості кроків, що залишилися. Розглянемо функцію після першого кроку $h_4(3^+,12)_{11}$. Це означає, що на першому кроці для перевірки беремо 3 кулі. Якщо результат «–», то відомо $h_4(12) = 11$.

Якщо результат перевірки 3-х куль «+», то на другому кроці беремо дві наступні кулі з 3-х та перевіряємо їх. Якщо отримаємо результат «+», то на наступному кроці знаходимо серед них одну активну, що приведе до функції $h_3(3^+,11)_9$, що після визначення другої активної кулі серед трьох приведе до функції $f_2(13)$, а це означає, що дві активні кулі серед 13-и можна визначити за $f_2(13) = 7$ кроків, що і було потрібно.

Якщо результат перевірки 2-х куль буде «–», то прийдемо до функції $h_4(3^+,10)_{10}$. Знову повторюємо прийом з двома наступними кулями, який далі будемо називати ескалацією, що завжди приводить до двох результатів. При позитивному результаті прийдемо до функції $h_3(3^+,9)_8 \le h_3(3^+,10)_8 = 8$, як було доведено раніше. При негативному результаті прийдемо до функції $h_4(3^+,8)_9$. Знову робимо ескалацію. Приходимо до функцій $h_4(3^+,6)_8$, яка обчислюється безпосередньо, та $h_3(3^+,7)_7$, до якої знову застосовуємо прийом ескалації. В результаті приходимо до функцій $f_2(3^+,6)_5 = 5$ та $h_3(3^+,5)_6$. Знову застосовуємо прийом ескалації.

В двох випадках отримуємо функції $h_3(3^+,3)_5$, яка обчислюється безпосередньо, та $f_2(3^+,4)_4 = 4$, що і завершує доведення.

Для 16 куль уже необхідно 13 випробувань,хоча кількість варіантів $m = C_{16}^4 = 1820$ що значно менше ніж $2^{13}$. Далі при збільшенні кількості куль цей розрив ще збільшується. Поняття прийому ескалації можна розширити, при цьому можна вибирати $2^l$ куль.

Будемо говорити, що функція $h_r(k^+,n)_s$ піддається ескалації на $2^l$ куль, в результаті якої приходимо до двох функцій $h_{r-1}(k^+, n-1)_{s-l-1}$ та $h_r(k^+,n-2^l)_{s-1}$. Як приклад розглянемо функцію $f_3(25)$. На першому кроці беремо 5 куль. Отримуємо $h_3(5^+,20)_{11}$. Робимо ескалацію на 8 куль. Приходимо до функцій $h(5^+,19)_7 = 7$ та $h_3(5^+,12)_{10}$. Останню функцію піддаємо ескалації на 4 кулі. Отримуємо $h(5^+,11)_7 = 7$ та $h_3(5^+,8)_9$, яка $\le f_3(13) = 9$, що і було потрібно довести.

Вчасно застосовуючи метод ескалації, можна отримувати наступні результати $f_4(16) = f_4(17) = f_4(18) = 13$.

## *Література*

1. Білецький В. І., Донець Г. П., Ненахов Е. І. Комбінаторне розпізнавання. Задачі та їх розв’язування // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2012. – С.21–29.

2. Донец Г. А., Кузнецов С. Т. Об одной комбинаторной задаче логического типа // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М.Глушкова НАН Украини, 2012. – С.101–108.

3. Донец Г. А., Билецкий В. И., Ненахов Э. И. Графовый подход к решению задачи поиска радиоактивных шаров // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кибернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2014. – С.147–15.

4. Донец Г. А., Билецкий В. И., Ненахов Э. И. Оптимальный поиск двух активных шаров на множестве заданных // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, 2015. – С.134–139.

5. Билецкий В. И., Ненахов Э. И. Алгоритмы поиска двух активных шаров на заданных множествах // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2016. – С.78–85.

6. Стецюк П. И., Колесник Ю. С., Березовский О. А. Об одном методе нахождения $L_p$-решения системы линейных уравнений // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2003. – С. 83–90.

7. Шор Н. З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. – 1977. – №1. – С. 94-95.

8. Knopov P. S., Korkhin A. S. Regression Analysis Under a Priori Parameter Restrictions. – Springer, 2012. – 234 p.