РОЗДІЛ 6. ЗАГАЛЬНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ

В даному розділі розглядається загальна схема методу направленого структурування для розв'язування екстремальних комбінаторних задач з додатковими умовами, що виникла на основі розглянутої в попередніх розділах задач оптимізації лінійної та дробово-лінійної функцій на комбінаторних конфігураціях без врахування додаткових умов, дослідження основних властивостей комбінаторних конфігурацій, а також встановленого графа генерації послідовності конфігурацій, за допомогою якого встановлюється зміна значень функцій.

Слід зазначити, що додаткові умови ускладнюють процес розв'язку задачі, але зменшують область допустимих розв'язків, звужуючи тим самим множину допустимих розв'язків.

6.1. Загальна постановка екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях з додатковими обмеженнями та метод направленого структурування для їх розв'язання

Розглянемо екстремальну задачу комбінаторної оптимізації як обчислювальну проблему, у якій задана множина альтернатив $X=\{x\}$, цільова функція $f(x): X \to R$, і потрібно знайти альтернативу $x^0 \in X$, на якій ця цільова функція приймає екстремальне значення: $f\left(x^0\right)=\underset{x\in X}{extr}\, f(X)$, $extr \in \{min, max\}$. Для задач оптимізації альтернативи $x \in X$ звичайно називають допустимими розв'язками, x^0 – оптимальний розв'язок, $X=\{x\}$ – множиною допустимих розв'язків.

У даному випадку розглядається X – деяка задана комбінаторна конфігурація. Задача може містити також додаткові лінійні обмеження, які утворять опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ вигляду: $D=\left\{x \in R^n \mid Gx \le h\right\}$, де $G \in R^{m\times n}$, $h \in R^m$. Запишемо лінійні обмеження у вигляді лінійних нерівностей:

$$G \cdot x=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, x_j \ge h_i\,;\; i \in N_m\,;\; j \in N_n. \qquad (6.1)$$

Зазначимо, що в попередніх розділах розглядалася задача локалізації лінійної функції за заданим значенням. Є доцільним використати при розв'язанні даної задачі цей метод. Враховуючи, що задача локалізації розглядалася для екстремальної безумовної задачі з лінійною функцією, то для задачі з додатковими умовами даний метод необхідно застосувати для кожного додаткового обмеження і об'єднавши одержані результати, знайти загальний розв'язок.

Конкретизуємо задачу і розглянемо її на комбінаторній конфігурації перестановок. Розглянемо перестановки з множини $A=\{1,2,\dots,n\}$. Кількість елементів множини перестановки $P_n(A)$ дорівнює $n!$. послідовності перестановок, згідно з методом їх генерування з попередніх розділів інтерпретуються як граф G_n, вершини якого відповідають всім точкам множини перестановок $P_n(A)$. Для однокритеріальної задачі $F(x)=f(x)$ без додаткових обмежень максимальне значення лінійної функції $f(x)$ при упорядкуванні коефіцієнтів по зростанню на графі перестановок $G(P_n)$ досягається в перестановці $(1,2,\dots,n)$, а мінімальне – у перестановці $(n,n-1,\dots,2,1)$. Враховуючи умову (6.1), сформулюємо підзадачі, що необхідно розв'язати для визначення підмножини допустимих перестановок: визначити множину зв'язних пар перестановок $(\underline{x},\overline{x})$, для яких при заданому $h_i, i\in N_m$ має місце

$$\overline{x}=\underset{Gx\ge h_i}{arg\,min}\,G(x), \qquad (6.2)$$

$$\underline{x}=\underset{Gx<h_i}{arg\,max}\,G(x). \qquad (6.3)$$

Загальна схема даного алгоритму полягає в наступному:

Початковий етап: Початкова множина перестановок M_0 замінюється на базову M за допомогою вихідної перестановки u, яка нормалізує цільову функцію $f(x)$. За допомогою цієї ж перестановки переводимо множину перестановок кожної обмежуючої функції в базову (спільну для всіх функцій). Тепер для кожної i-ої обмежуючої функції g_i робимо такі операції:

1) нормалізуємо функцію за допомогою перестановки u_i, отримуючи індивідуальну множину перестановок M_i; тоді для

кожної обмежуючої функції граф перестановок $G(P_n)$ має стандартний вигляд:

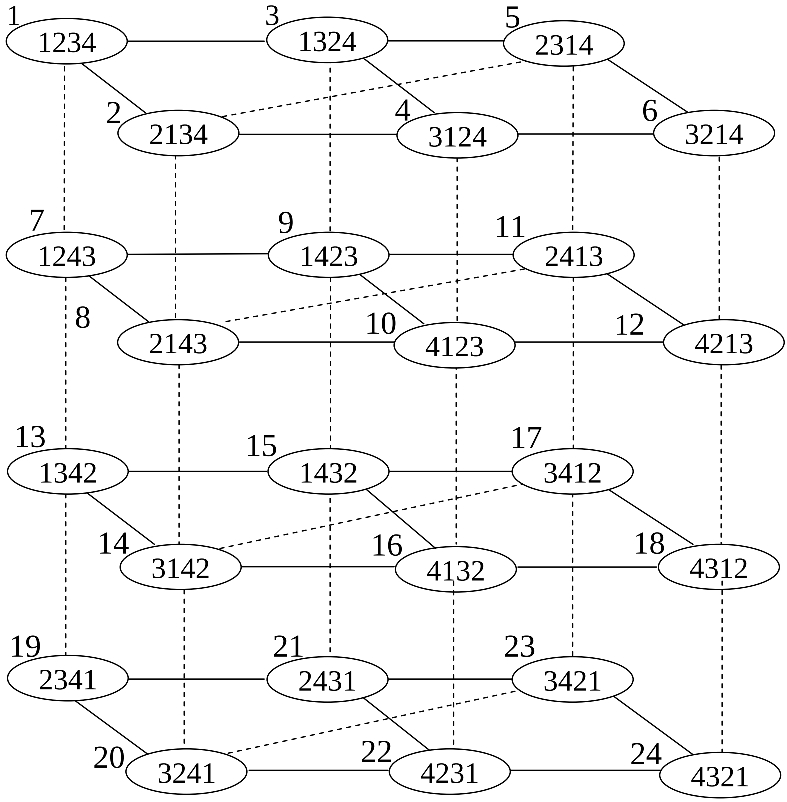

Рис. 6.1. Стандартний вигляд графа перестановок

2) розв'язуючи задачу локалізації для $h_i, i \in N_m$, отримуємо допустиму множину перестановок для g_i;

3) за допомогою перестановки u_i^{-1} визначаємо ту ж множину в базовій множині перестановок M.

4) знаходимо на цій множині *extr* функції g_i.

5) після всіх цих операцій відносно кожної обмежуючої функції знаходимо розв'язок задачі як $min\{extrg_j\}$.

6) за допомогою перестановки u^{-1} знаходимо розв’язок задачі в початковій множині перестановок M_0.

Перед тим, як розглянути приклад, детальніше розберемо в алгоритмі пункти 2 і 3. Підграф графа $G(P_n)$, у якого зафіксовано останній елемент i, назвемо гранню графа $G(P_n)$ і позначимо G_i. Всі грані будемо зображати у вигляді ребра, інцидентні вершини якого є початкова та кінцева вершини відповідного підграфа. В результаті отримаємо структурну схему графа $G(P_n)$, яка має вигляд драбини (рис. 6.2):

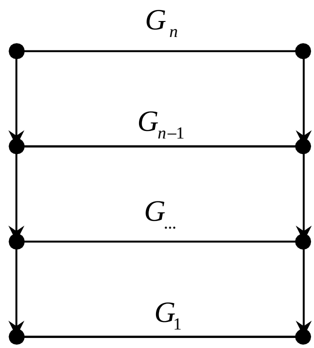

Рис. 6.2. Структурна схема графа $G(P_n)$

Аналогічно робиться структурна схема і підграфів G_i, тільки в них будуть фіксовані 2 індекси (і так далі по індукції). Виконуючи пункт 2 в алгоритмі, отримаємо спочатку структурну схему для обмежуючої функції $G_i(g_i)$, $(i=1,2,\dots,m)$. Подрібнюючи структурні схеми, отримаємо допустиму множину перестановок для g_i у вигляді підграфів з різною кількістю індексів. Тепер для виконання пункту 3 необхідно подіяти оберненою перестановкою u_i^{-1} на індекси цих підграфів і отримаємо шукану кількість таких же підграфів з індексами, але уже в базовій множині.

Розглянемо цей алгоритм на **прикладі 6.1:** дано функцію $f(x)=4x_1+2x_2+7x_3+9x_4$, елементи множини перестановок для $P_4 = \{1, 2, 3, 4\}$; задані додаткові обмеження на перестановки, що визначають область допустимих значень цільової функції: $g_1 = 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 1x_4 \leq 60$, $g_2 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \geq 63$.

Знайти: екстремум цільової функції – максимум.

Розв'язання: **Початковий етап.** Нормалізуємо задану цільову функцію $f(x)$ у порядку зростання за допомогою перестановки $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Отримаємо цільову функцію $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4$. Граф перестановок для нормалізованих функцій має вигляд рис. 6.1. Нормалізуємо також обмежуючі функції $g_1 = 6x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 1x_4$ та $g_2 = 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4$ за допомогою перестановки, що і цільову функцію $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Крок 1. Нормалізуємо g_1 за допомогою перестановки $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ до вигляду $g_1 = x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 10x_4$.

Структурна схема графу G розбивається на структурні схеми підграфів G_1, G_2, G_3, G_4, і знаходиться значення функції в крайніх точках підграфів, що визначають *min* та max (рис. 6.3):

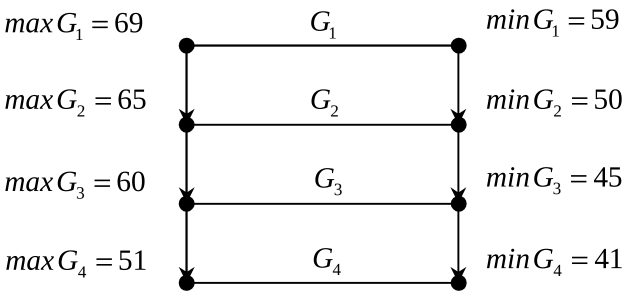

Рис. 6.3. Загальна структурна схема графу для g_1

Розв’язуючи далі задачу про локалізацію, отримаємо в G_1 дві вершини, які не задовольняють обмеженням, це $4=(3124)$ та $6=(3214)$. В G_2 це такі вершини 10, 11, 12, в G_3 всі, крім 13, а в G_4 всі вершини задовольняють обмеженням. В сумі маємо множину вершин (4, 6, 10, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24). За допомогою оберненої перестановки $u_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ з цієї множини в базовій множині отримаємо такі перестановки (8, 7, 2, 15, 1, 24, 18, 12, 17, 6, 11, 5), які не задовольняють обмеженням. Без сумніву, максимальне значення цільова функція приймає у точці $3=(1324)$, яке дорівнює 64. Зауважимо, що підграфу G_4, вершини якого задовольняють умовам функції g_1, відповідає в базовій множині підграф G_3, тому що в підстановці u_i^{-1} 4 переходить в 3.

Крок 2. Нормалізуємо g_2 за допомогою перестановки $u_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ до вигляду $g_2=4x_1+6x_2+8x_3+9x_4$.

Структурна схема графу G розбивається на структурні схеми підграфів G_1, G_2, G_3, G_4, і визначається значення функції в крайніх точках підграфів, які визначають мінімальне та максимальне значення на підграфах

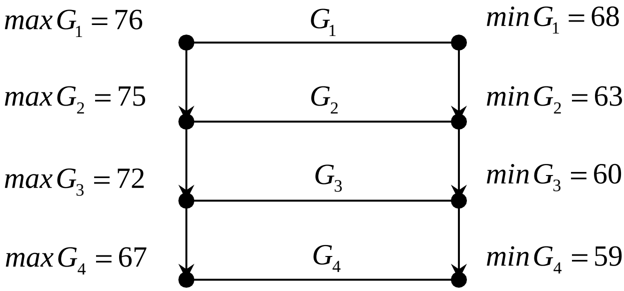

Рис. 6.4. Загальна структурна схема графу для g_2

Всі вершини підграфів G_1 та G_2, що зображені на структурній схемі графа 6.4, задовольняють обмеженням. В G_3 їм не задовольняють дві вершини 17 та 18. В G_4 обмеженням не задовольняють три вершини 22, 23 та 24. За допомогою оберненої перестановки $u_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ з цієї множини в базовій множині отримаємо такі самі перестановки. Оскільки вершина 2 входить в обмеження і для функції g_2, то розв'язок задачі не зміниться – максимальне значення цільова функція приймає у точці $3 = (1324)$, яке дорівнює 64.

Залишається повернутися у початкову множину перестановок: максимальний розв'язок задачі буде на перестановці (3124).

6.2. Застосування методу направленого структурування до розв'язуваня екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях розміщень

Враховуючи те, що для конфігурації перестановок існує граф, який може бути застосований в методі направленого структурування, то згідно з властивостями конфігурації розміщень, можна також побудувати граф розміщень.

Розглянемо граф конфігурації розміщень $A(n,m)$, яка утворена з елементів $\{1, 2, \ldots, n\}$ при умові $A(4,3)$. Тоді число таких конфігурацій дорівнює

$$A(n,m) = n(n-1)...(n-m+1) = (n)_m, \; m \le n,$$

де $(n)_m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ і $A(n,m) = 0, m > n,$ а для $A(4,3) = 24.$

На основі вище зазначених роздумів та згідно нового методу генерування комбінаторних об'єктів – методу переміщення максимального елементу можна сформулювати наступну теорему.

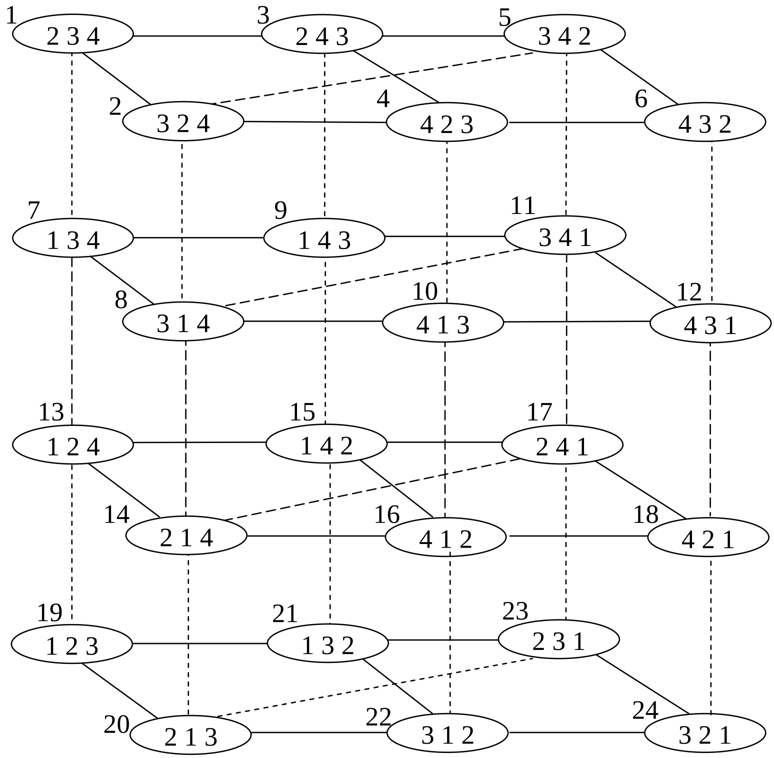

Рис. 6.5. Граф конфігурації розміщень

Теорема 6.1. Граф $G\big(A(n,m)\big)$ конфігурації розміщень $A(n,m)$ при $n>m$ і при будь-якому векторі $\vec{A}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ еквівалентний графу $G(P_n)$ комбінаторної конфігурації перестановок P_n.

Доведення теореми випливає з означення еквівалентності графів та згідно методу генерування – методу максимального переміщення елементів. Тоді метод направленого структурування може бути без обмежень застосований і до екстремальних задач з додатковими обмеженнями на розміщеннях.

Загальна схема алгоритму за методом направленого структурування до комбінаторної конфігурації розміщень полягає в наступному:

Початковий етап. Початкова множина розміщень A_0 замінюється на базову A за допомогою вихідної перестановки u, яка нормалізує цільову функцію $f(x)$. За допомогою цієї ж перестановки переводимо множину перестановок кожної обмежуючої функції в базову (спільну для всіх функцій). Тепер для кожної i-ої обмежуючої функції g_i робимо такі операції:

1) нормалізуємо функцію за допомогою перестановки

$$u_{\mathrm{i}} = u_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 2 & 1 & \dots & \varphi_m \end{pmatrix}, \qquad (6.4)$$

отримуючи індивідуальну множину розміщень A_i; тоді для кожної обмежуючої функції граф розміщень $G\big(A(n,m)\big)$ має стандартний вигляд

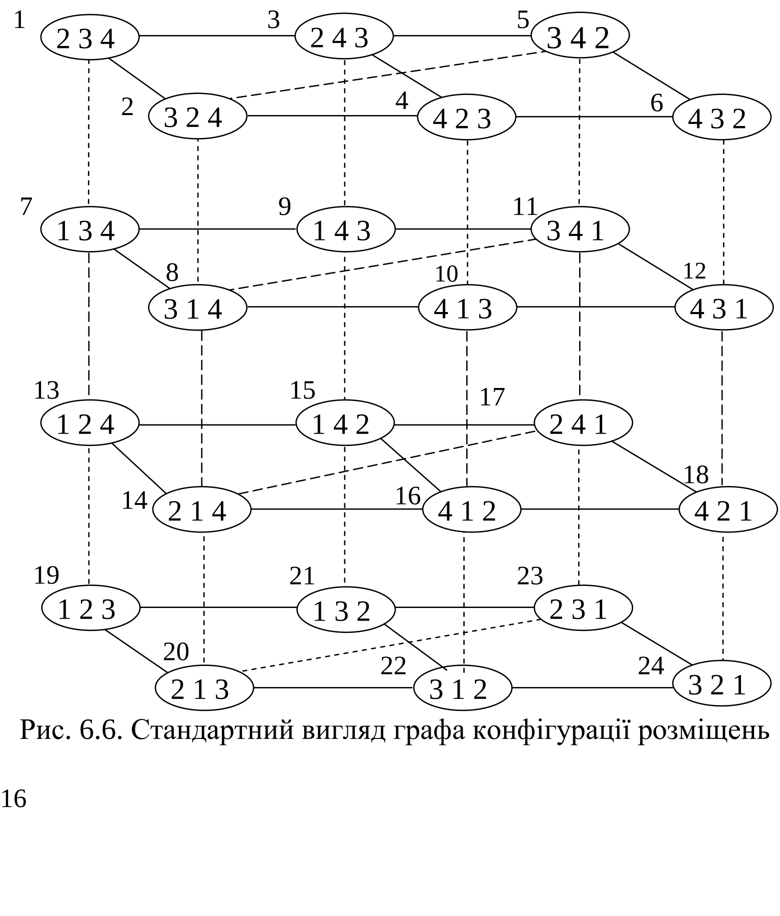

Рис. 6.6. Стандартний вигляд графа конфігурації розміщень

2) розв’язуючи задачу локалізації для $h_i, i \in N_m$, отримуємо допустиму множину розміщень для додаткового лінійного обмеження g_i;

3) за допомогою перестановки u_i^{-1} визначаємо ту ж множину в базовій множині розміщень $G\left(A\left(n,m\right)\right)$.

4) знаходимо на цій множині *extr* функції g_i.

5) після всіх цих операцій відносно кожної обмежуючої функції знаходимо розв’язок задачі як $min\left\{extrg_j\right\}$.

6) за допомогою перестановки $u^{-1}u^{-1}$ знаходимо розв’язок задачі в початковій множині розміщень A_0.

Розглянемо цей алгоритм на прикладі.

Приклад 6.3. Дано функцію

$$f\left(x\right) = 4x_1 + 2x_2 + 7x_3,$$

елементи множини, що формують множину розміщень $A_i\left(1234\right)$; задані додаткові обмеження, які визначають область допустимих значень цільової функції:

$$g_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \geq 42, \; g_2 = 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \leq 64,$$

Знайти: екстремум цільової функції – максимум.

Розв’язання:

Початковий етап. Нормалізуємо задану цільову функцію $f\left(x\right)$ у порядку зростання за допомогою перестановки

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

отримаємо цільову функцію: $f\left(x\right) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$, а також обмежуючі функції

$$g_1 = 6x_1 + 4x_2 + 8x_3,$$

$$g_2 = 6x_1 + 5x_2 + 10x_3.$$

Граф розміщень для нормалізованих функцій має вигляд:

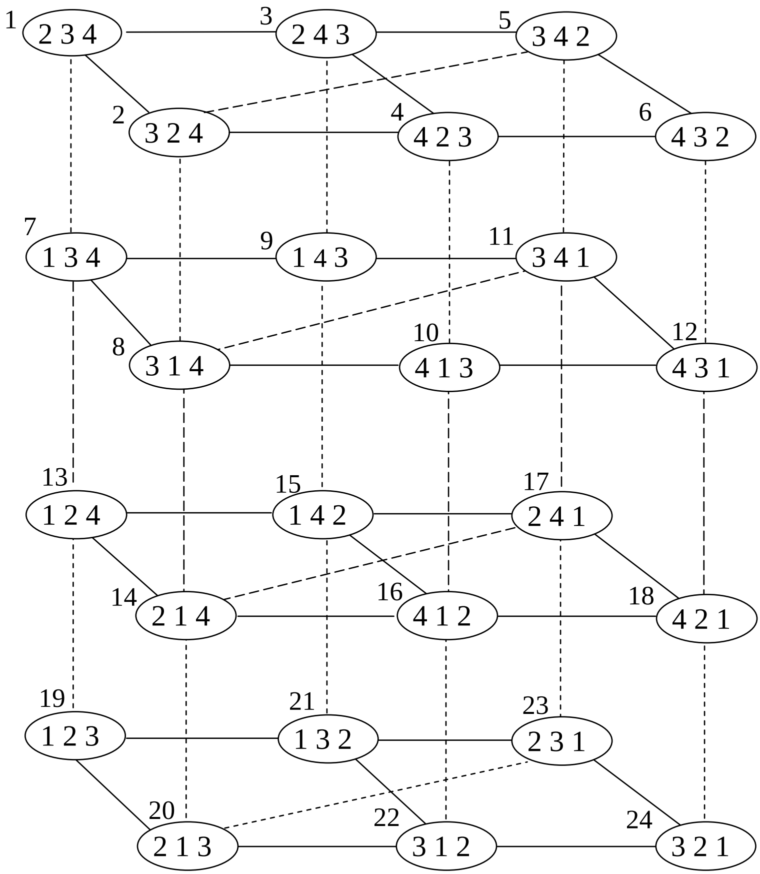

Рис. 6.7. Граф конфігурації розміщень

Крок 1. Нормалізуємо g_1 за допомогою перестановки $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ до вигляду $g_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3$.

Загальна структурна схема графу G як і в попередніх випадках, розбивається на структурні схеми підграфів G_1, G_2, G_3, G_4, і знаходиться значення функції в крайніх точках підграфів, які визначають мінімальне та максимальне значення на підграфах (рис. 6.8);

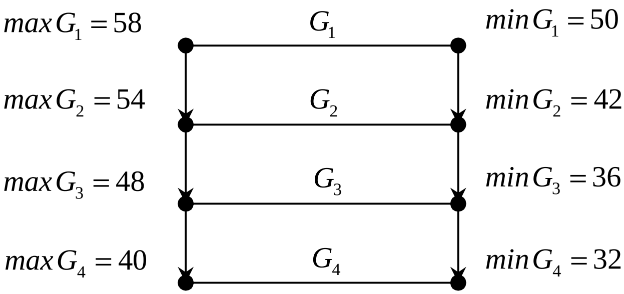

Рис. 6.8. Загальна структурна схема графу для g_1

Розв'язуючи далі задачу про локалізацію та враховуючи, що для перестановок, які можуть бути розв'язками задачі, необхідно виконання умови $g_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \geq 42$, згідно рис. 6.8. розв'язками будуть всі вершини підграфів G_1, G_2. А з множини вершин підграфа G_3 необхідно розглянути наступні:

№ п/п вершини	x_1	x_2	x_3	g_1
13	1	2	4	48
14	1	4	2	44
15	2	1	4	46
16	2	4	1	40
17	4	1	2	38
18	4	2	1	36

Тоді з G_3 отримаємо вершини, які задовольняють обмеженням, це $13 = (124)$, $14 = (142)$, $15 = (214)$. В G_4 всі вершини не задовольняють обмеженням. В сумі маємо множину вершин (1–6, 7–12, 13, 14, 15). За допомогою оберненої перестановки $u_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ з цієї множини в базовій множині отримаємо такі підграфи G_1, G_2 та точки перестановки (13, 14, 15), які задовольняють обмеженням. Максимальне значення цільова функція, при умові виконання першого додаткового обмеження

$g_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \geq 42$, приймає у точці $2 = (3\ 2\ 4)$, яке дорівнює 44.

Крок 2. Нормалізуємо g_2 за допомогою перестановки $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ до вигляду $g_2 = 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \leq 64$.

Схема структурного графу G розбивається на схеми структурних підграфів G_1, G_2, G_3, G_4, і визначається значення функції в крайніх точках підграфів, які визначають мінімальне та максимальне значення на підграфах

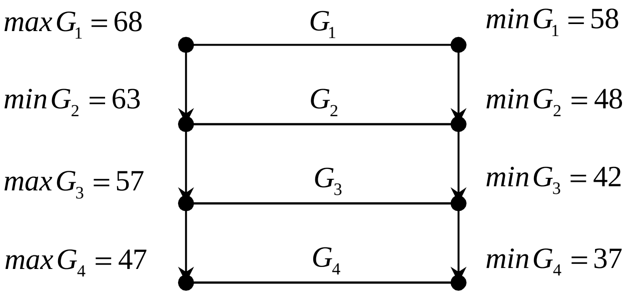

Рис. 6.9. Структурна схема графу для g_2

Всі вершини під графів G_1, G_2 та G_3 задовольняють обмеженням. В G_4 обмеженням задовольняють наступні вершини т. $3\ (2\ 4\ 3)$, т. $4\ (3\ 4\ 2)$, т. $5\ (4\ 2\ 3)$, т. $6\ (4\ 3\ 2)$.

За допомогою оберненої перестановки $u_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ з цієї множини в базовій множині отримаємо такі самі перестановки.

Оскільки вершина 2 в якій досягається максимальне значення цільової функції при виконанні першого додаткового обмеження g_1 не задовольняє додаткове обмеження g_2, то розв'язок задачі зміниться – максимальне значення цільова функція приймає у точці $8 = (3\ 1\ 4)$, яке дорівнює 42.

Повернемося у початкову множину розміщень за допомогою оберненого перетворення: максимальне значення функції $f(x)$ рівне 42 і досягається в точці 8 з координатами (314).

6.3. Застосування методу направленого структурування до розв’язування екстремальних задач на конфігурації сполучень

Розглянемо більш простий випадок застосування методу направленого структурування до розв’язування екстремальних задач на комбінаторній конфігурації сполучень.

Для конфігурації сполучень елементи можна зобразити в вигляді дерева, оскільки елементи сполучень згідно методу генерування можна розмістити в вигляді неорієнтованого графу, що не має циклів, тобто такого, в якому кожна пара вершин з’єднана одним простим шляхом (ланцюгом).

Дерево можна орієнтувати, вибравши для цього довільну вершину в якості кореня і ребрам приписати таку орієнтацію, що б кожна вершина з’єднувалася з коренем тільки одним простим шляхом, тоді елементи конфігурації сполучень будуть розміщені в вигляді орієнтованого дерева, де піддерево визначається початковим елементом в вершині.

Наприклад, нехай кількість усіх сполучень без повторень з n елементів по r рівне C_n^r, де r і n – невід’ємні цілі числа, причому $r \le n$, то базовим буде орієнтоване дерево з n піддеревами, на які можна розбити базове.

Слід зазначити, що при розв’язуванні екстремальних задач на множині сполучень не має значення порядок розміщення елементів, а лише їх вибір з вихідної множини $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в якій елементи впорядковані за зростанням $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, то екстремальне значення функції завжди можна визначити. Причому, між вершинами в кожному з піддерев існує гамільтонів шлях. Досить цікавими є задачі на множині сполучень, в яких необхідно оперувати з симетричними функціями типу

$$\alpha x_1 x_2 + \alpha x_2 x_3 + \ldots + \alpha x_{n-1} x_n . \qquad (6.5)$$

Оскільки такі функції є симетричними, то немає потреби в нормалізації функції. Тоді загальна схема алгоритму за методом направленого структурування для екстреамльних задач на сполученнях полягає в наступному:

Початковий етап. Вибирається базова M множина за допомогою вихідної перестановки u. Тепер для кожної i-ї обмежуючої функції g_i робимо такі операції:

1) визначаємо для кожної обмежуючої функції дерево $G(P_n)$, що має стандартний вигляд отримуючи індивідуальну множину сполучень M_i;

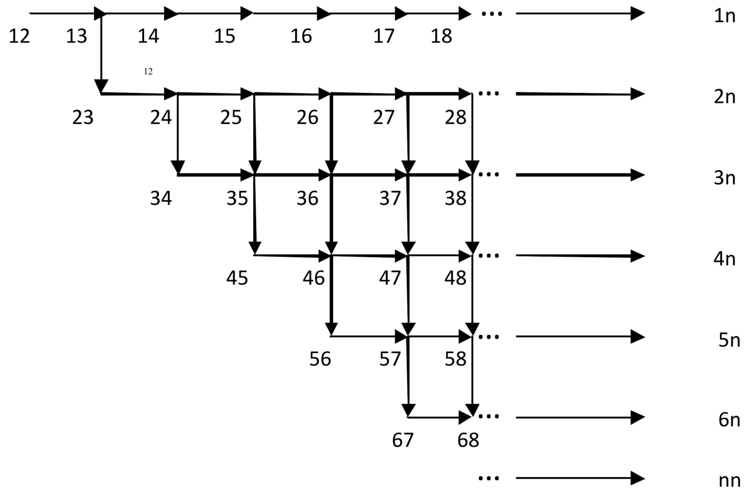

Рис. 6.10. Стандартний вигляд дерева сполучень

2) розв'язуючи задачу локалізації для $h_i, i \in N_m$, отримуємо допустиму множину сполучень для g_i;

3) за допомогою перестановки u_i^{-1} визначаємо ту ж множину в базовій множині сполучень M.

4) знаходимо на цій множині *extr* функції g_i.

5) після всіх цих операцій відносно кожної обмежуючої функції знаходимо розв'язок задачі як $min\{extrg_j\}$.

6) за допомогою перестановки u^{-1} знаходимо розв'язок задачі в початковій множині сполучень M_0.

Розглянемо цей алгоритм на прикладі.

Приклад 6.4. Дано функцію $f(x) = 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$, елементи множини, що формують множину сполучень $A_i(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$; задані додаткові обмеження, які визначають область допустимих значень цільової функції:

$$g_1 = 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 \geq 165,\ \ g_2 = 5x_1x_2 + 5x_2x_3 + 5x_1x_3 \leq 220\ .$$

Знайти: екстремум цільової функції – максимум.

Розв’язання:

Початковий етап. Нормалізуємо задану цільову функцію $f(x)$ у порядку зростання за перестановкою $u=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$; отримаємо цільову функцію $f(x)=6x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$, а також обмежуючі функції $g_1=4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$, $g_2=5x_1x_2+5x_2x_3+5x_1x_3$.

Розглянемо конфігурацію сполучень з 6 по 3, де $C_6^3=20$.

Формуємо базове дерево елементів сполучення для цільової функції: вибираємо з впорядкованої за зростанням множини з шести заданих елементів 1, 2, 3, 4, 5, 6 перші три 1, 2, 3 і для побудови першого піддерева останній елемент замінюємо наступними з заданої множини, маємо: 1, 2, 4; 1, 2, 5; 1, 2, 6. Тоді друге піддерево утворюється шляхом заміни в кожному з попередніх елементів крім першого другої компоненти на наступний елемент з заданої множини, маємо 1, 3, 4; 1, 3, 5; 1, 3, 6.

Маємо базове дерево

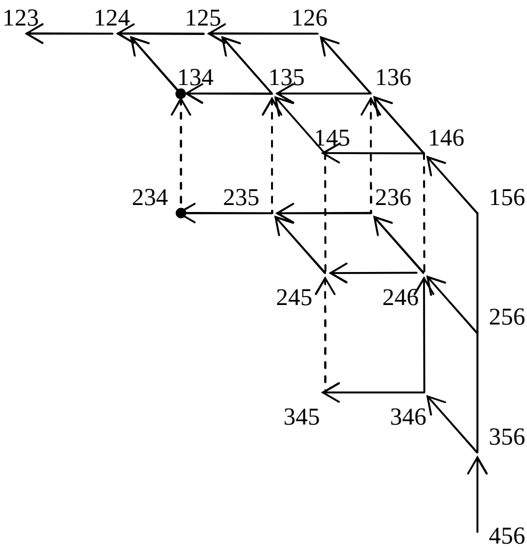

Рис. 6.11. Стандартний вигляд дерева конфігурації сполучень

На основі базового дерева будуємо схему структурного дерево рішень.

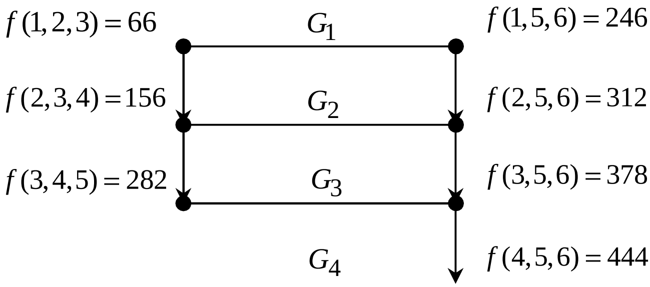

Рис. 6.12. Структурна схема піддерева сполучень для функції цілі $f(x)$

Крок 1. Нормалізуємо g_1 за допомогою перестановки $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ до вигляду $g_1 = 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3$.

Розглядаємо структурну схему дерева конфігурації сполучень, що можна представити наступним чином

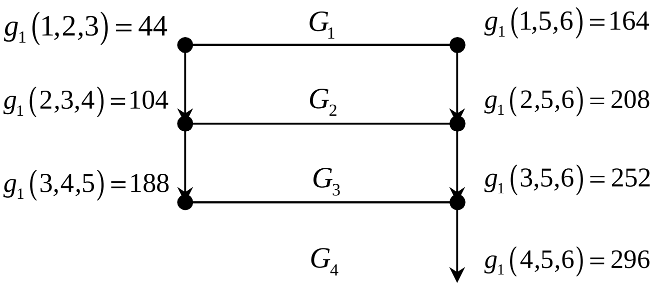

Рис. 6.13. Структурна схема піддерева сполучень для g_1

Структурна схема дерева G розбивається на піддерева G_1, G_2, G_3 і визначається значення функції в крайніх точках піддерев, які визначають мінімальне та максимальне значення на піддеревах (рис. 6.2).

Розв’язуючи далі задачу про локалізацію та враховуючи, що для сполучень, які можуть бути розв’язками задачі, необхідно виконання умови $g_1 = 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 \geq 165$, згідно рис. 6.13 розв’язками будуть всі вершини піддерев G_3, G_4. А з множини вершин піддерев G_1 – не задовольняє жодна з вершин, G_2 необхідно розглянути наступні (2 4 6), (2 5 6).

Крок 2. Нормалізуємо g_2 за допомогою перестановки $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ до вигляду $g_2 = 5x_1x_2 + 5x_2x_3 + 5x_1x_3$. Структурна схема дерева розбивається на піддерева G_1, G_2, G_3, G_4, для яких визначається значення функції в крайніх вершинах, що задовольняють обмеження $g_2 = 5x_1x_2 + 5x_2x_3 + 5x_1x_3 \leq 220$.

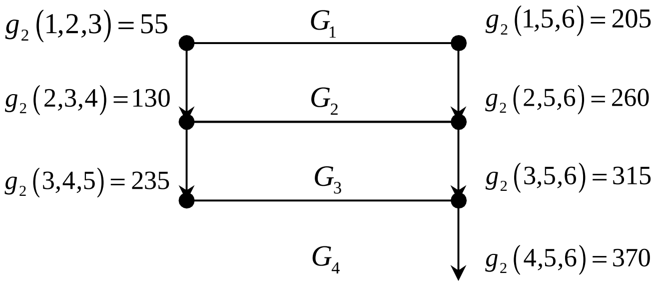

Рис. 6.14. Структурна схема дерева сполучень для g_2

Всі вершини піддерева G_1 задовольняють обмеженням. В G_2 обмеженням задовольняють лише наступні точки (2 3 4), (2 3 5), (2 3 6), (2 4 5), (2 4 6). В G_3 і G_4 обмеженням не задовольняють всі вершини.

Шукаємо перетин структурних схем піддерев для обох додаткових обмежень – це вершини піддерева G_2.

Одержимо вершину (2 4 6), що задовольняє обидва обмеження, а функція набуває максимального значення в цій вершині, то точка (2 4 6) є розв’язком задачі.

6.4. Застосування методу направленого структурування до розв'язування екстремальних задач з дробово-лінійними цільовими функціями

Розглянемо дробово-лінійну функцію $F(x)$, де чисельник $f(x)$ і знаменник $g(x)$ – дві лінійні, в яких коефіцієнти визначаються за правилом арифметичної прогресії:

$$c_i = c_1 + \Delta(i-1),$$

$$d_i = d_1 + \delta(i-1). \tag{6.6}$$

Як відомо з розділу 4 можна побудувати гамільтонів шлях усередині кожної шестірки, елементів перестановки і прослідити зміни значень цільової функції у вершинах графа, так як і для лінійної функції. Тоді граф перестановок $\tilde{G}(P_n)$, згідно теореми 4.4. для дробово-лінійної функції $F(x)$, коефіцієнти якої визначені згідно (6.6), співпадає з графом перестановок для лінійної функції $G(P_n)$ з точністю до орієнтації. Тому метод направленого структурування можна застосувати до розв'язування задач з дробово-лінійними функціями цілі та з лінійними додатковими обмеженнями.

Для задач такого типу загальна схема даного алгоритму полягає в наступному:

Початковий етап. Визначаються коефіцієнти цільової функції за формулою (6.6) для чисельника і знаменника відповідно. Задається множна перестановок (якщо задача розглядається на множині перестановок).

Початкова множина перестановок M_0 замінюється на базову M за допомогою вихідної перестановки u, яка нормалізує цільову функцію $F(x)$. За допомогою цієї ж перестановки переводимо множину перестановок кожної обмежуючої функції в базову (спільну для всіх функцій). Тепер для кожної i-ї обмежуючої функції g_i робимо такі операції:

1) нормалізуємо функцію за допомогою перестановки u_i, отримуючи індивідуальну множину перестановок M_i; тоді для

кожної обмежуючої функції граф перестановок $G(P_n)$ має стандартний вигляд згідно рис. 6.1;

2) розв'язуючи задачу локалізації для $h_i, i \in N_m$, отримуємо допустиму множину перестановок для g_i;

3) за допомогою перестановки u_i^{-1} визначаємо ту ж множину в базовій множині перестановок *M;*

4) знаходимо на цій множині *extr* функції g_i*;*

5) після всіх цих операцій відносно кожної обмежуючої функції знаходимо розв'язок задачі як $min\{extrg_j\}$*;*

6) визначаємо максимальне значення дробово-лінійної функції $F(x)$ на об'єднаній множині вершин, що задовольняє кожне додаткове лінійне обмеження g_j;

7) за допомогою перестановки u^{-1} знаходимо розв'язок задачі з дробово-лінійною цільовою функцією в початковій множині перестановок M_0.

Розглянемо на прикладі реалізацію даного алгоритму.

Приклад 6.6. Дано функцію $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, в якій чисельник і знаменник виражається наступним чином

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 + 14x_5,$$

$$g(x) = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 11x_4 + 15x_5$$

задано елементи множини $A_i(1\ 2\ 3\ 4 5)$, що формують множину перестановок; додаткові обмеження, які визначають допустимі значення цільової функції: $g_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 1x_5 \geq 66$.

Знайти: екстремум цільової функції – максимум.

Розв'язання:

Початковий етап. Розглядаємо додаткове обмеження-функції g_1. Нормалізуємо задану функцію g_1 у порядку зростання за допомогою перестановки $u = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$ отримаємо обмежуючу функцію $g_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 1x_5 \geq 66$. На основі розрахунків четвертого розділу представимо граф перестановок для нормалізованих дробово-лінійних функцій вершини якого генеруються метод переміщення максимального елемента.

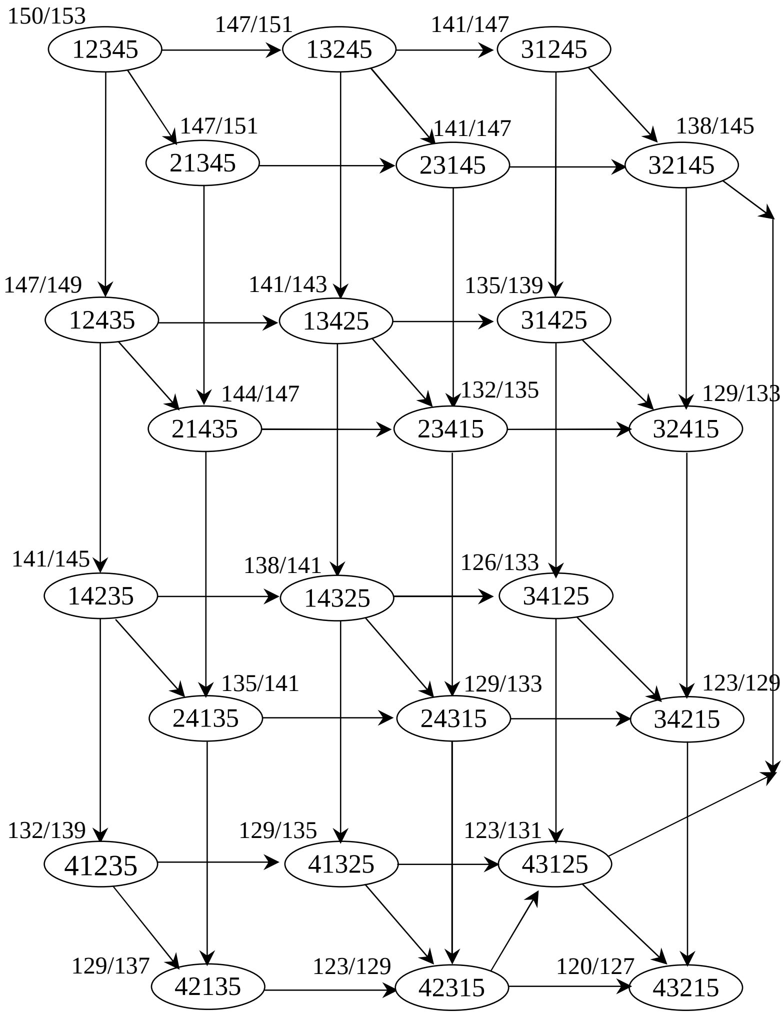

Рис. 6.15 Підграф *A* при фіксованому значенні останнього максимального елемента

Побудуємо наступний підграф загального графу в якому є фіксованим четвертий елемент, тобто граф отримується з попереднього шляхом переміщення максимального елемента з п’ятого на четверте місце.

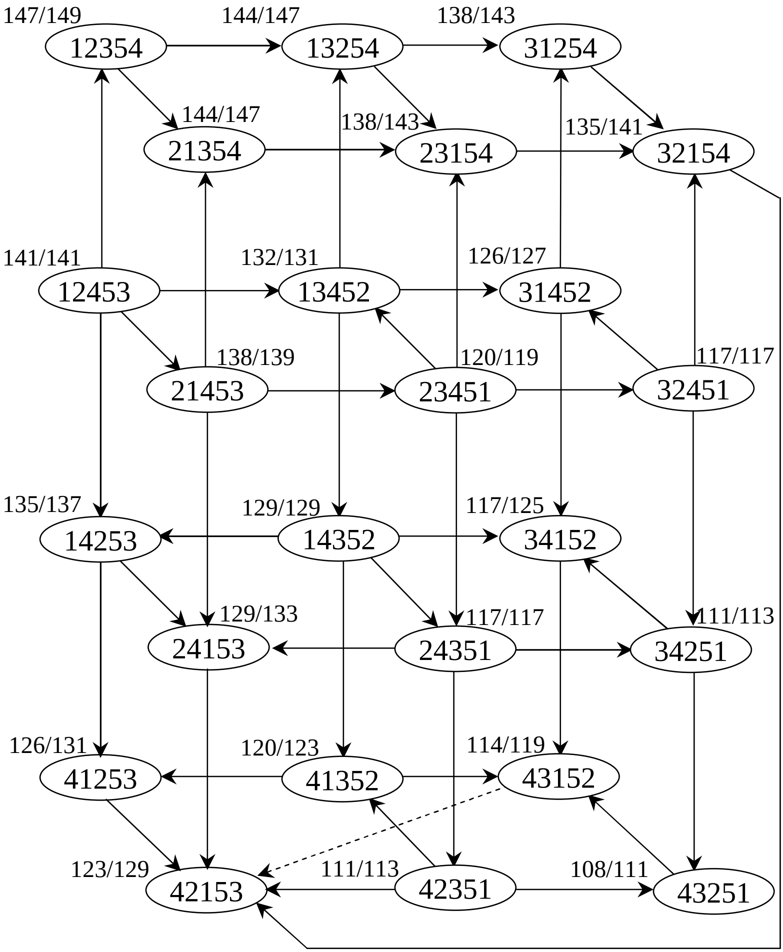

Рис. 6.16. Підграф *B* при фіксованому максимальному елементі на четвертому місці

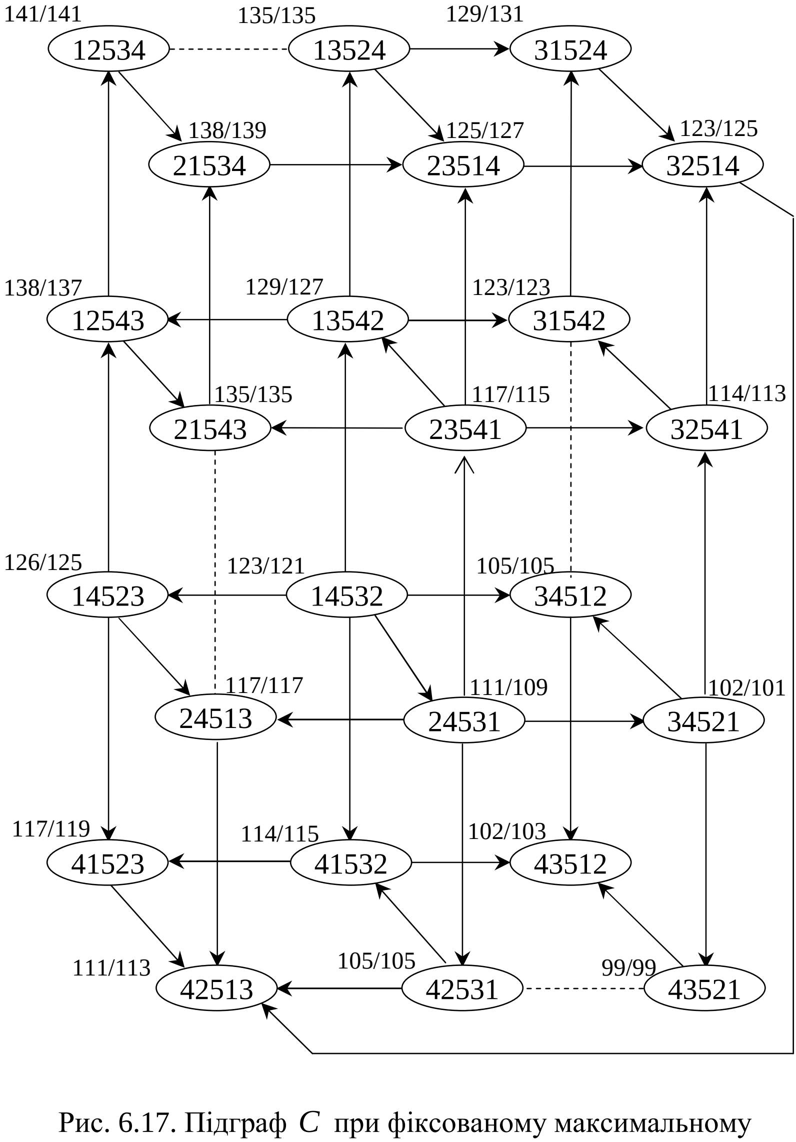

Рис. 6.17. Підграф C при фіксованому максимальному елементі на третьому місці

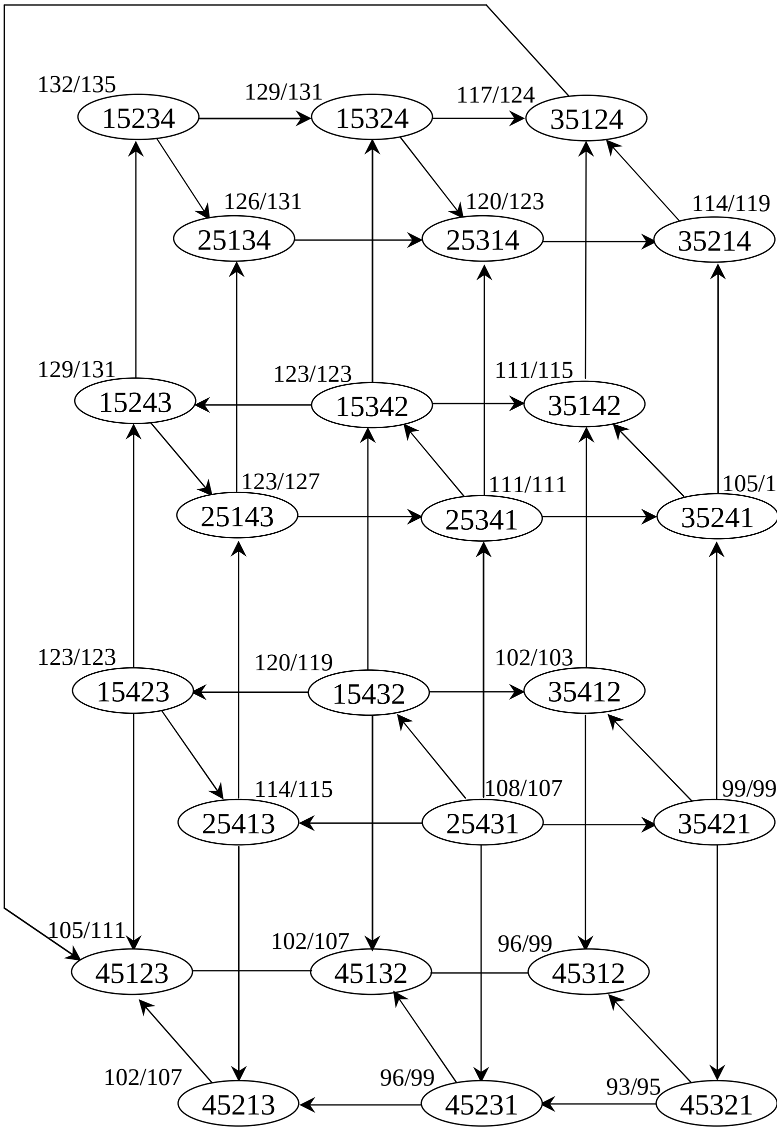

Рис. 6.18. Підграф *D* при фіксованому максимальному елементі на другому місці

Далі максимальний елемент переміщується на останнє місце.

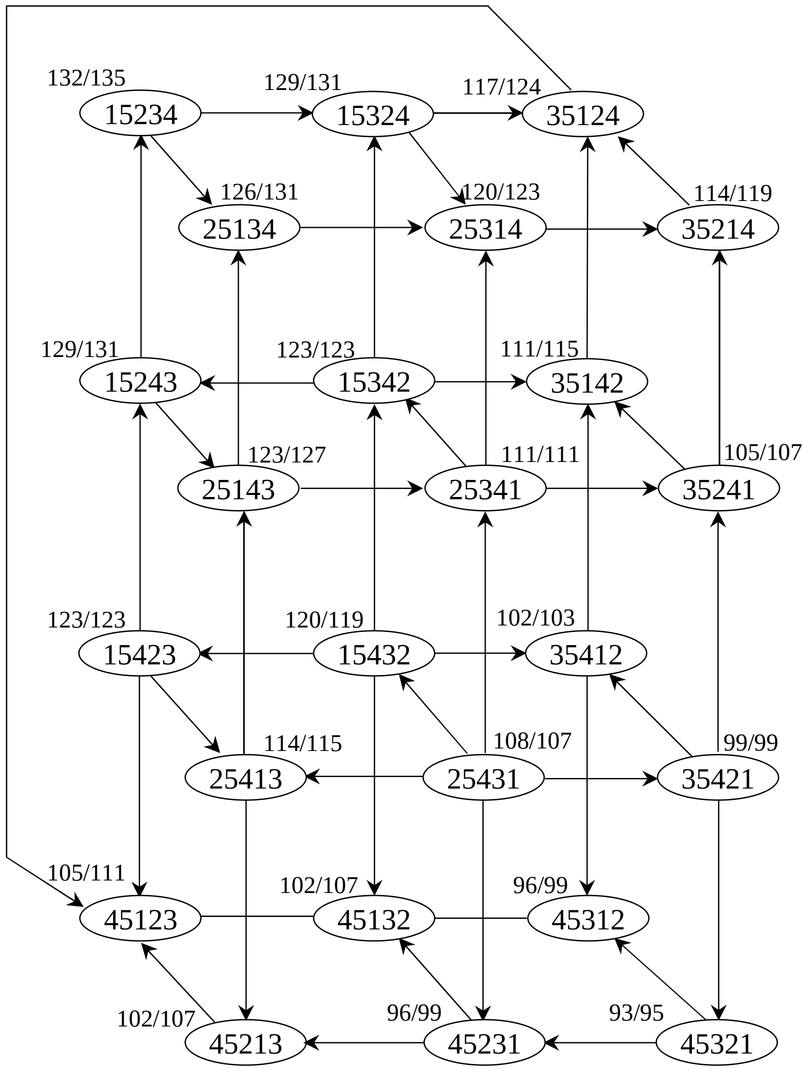

Рис. 6.19 Підграф *E* при фіксованому максимальному елементі на першому місці

Дане додаткове обмеження $g_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 1x_5 \geq 66$ необхідно звести до нормального вигляду.

Розглянемо для додаткового обмеження схему структурного графу конфігурації перестановок, враховуючи що для дробово-лінійної функції вибраний метод генерування конфігурації перестановок – метод переміщення максимального елемента. Тоді схема структурного графу будується, враховуючи специфіку алгоритму методу переміщення максимального елементу: в крайніх екстремальних вершинах схеми розміщені точки для яких місце максимального елементу зафіксоване в залежності від рівня підграфа, а останні координати цих точок упорядковані, враховуючи те,що якщо має місце $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$, то максимум функції $F(x,c,u)$ досягається для перестановки $u_0 = (1, 2, \ldots, n)$, а мінімум – для перестановки $u^* = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$.

Тоді структурна схема графу перестановок має вигляд:

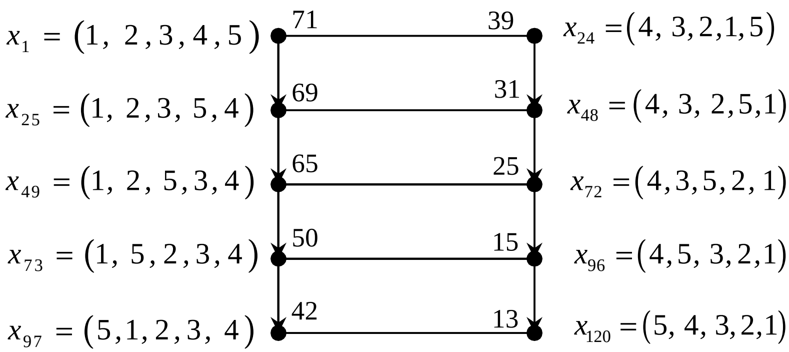

Рис. 6.20. Структурна схема графу перестановок для g_1

Згідно рис. 6.20 умову додаткового обмеження задовольняють частково точки з схеми підграфів G_1, G_2. Тому для них необхідно також зробити розклад за схемами підграфів.

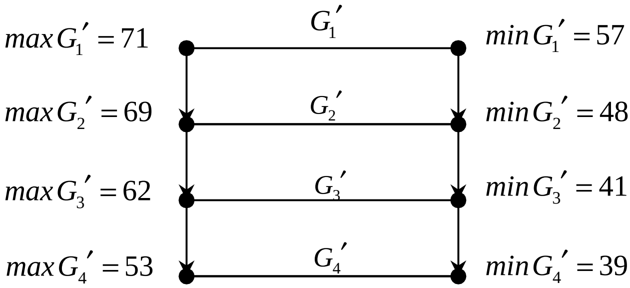

Рис. 6.21. Структурна схема підграфів для підграфа G_1

Тоді на основі подальших розрахунків на підграфах G_1', G_2' визначимо необхідні точки:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	g_1
1	1	2	3	4	5	71
2	1	2	4	3	5	69
3	1	3	2	4	5	66
7	2	1	3	4	5	69
8	2	1	4	3	5	67

Здійснимо обернене перетворення $u^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix}$ і отримаємо наступні точки, що визначають область визначення функції:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	g_1
1	4	5	1	2	3	71
2	3	5	1	2	4	69
3	4	5	1	3	2	66
7	4	5	2	1	3	69
8	3	5	2	1	4	67

Наступним кроком є визначання максимального значення функції в цих точках. Скористаємося відомим розкладом за підграфами значеннями дробово-лінійної функції і порівнявши результати, отримаємо вершину (3 5 2 1 4), що доставляє максимальне значення цільової функції $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Висновки до розділу

Досліджено складні задачі з лінійною та дробово-лінійною цільовими функціями і додатковими лінійними обмеженнями на комбінаторних конфігураціях і застосовано загальну схему методу направленого структурування до розв'язування таких задач.

Зокрема, метод направленого структурування, застосований до екстремальних задач з лінійною функцією цілі та додатковими лінійними обмеженнями на комбінаторних конфігураціях перестановок, розміщень, сполучень. Також даний метод дістав подальший розвиток для задач з дробово-лінійними функціями цілі та додатковими лінійними обмеженнями на комбінаторній множині перестановок.

В розділі представлено ряд числових експериментів, які підтверджують ефективність методу направленого структурування для розв'язування екстремальних задач на різних комбінаторних конфігураціях та для різних цільових функцій.

Моделі екстремальних задач з додатковими лінійними обмеженнями та комбінаторними властивостями області допустимих розв'язків можуть бути застосована для ухвалення рішень в практичних задачах економіки, техніки, народного господарства.

РОЗДІЛ 7. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ УМОВІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОСТІ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ

Екстремальні задачі оптимізації декількох функцій виникають при дослідженні багатьох теоретичних і прикладних проблем. Практично будь-яка прикладна задача вимагає, щоб шуканий розв'язок знаходився з урахуванням багатьох критеріїв. Останні, як правило, суперечливі в тому розумінні, що якість порівнюваних альтернатив неможливо адекватно виразити одним комплексним критерієм, що представляє деяку згортку вхідних критеріїв.

Задача ускладнюється, якщо накладаються додаткові умови комбінаторності, тобто задача розглядається на деякій комбінаторній конфігурації. Це означає, що апарат класичної оптимізації є недостатнім для пошуку і прийняття ефективних розв'язків.

Існування оптимізаційних задач з багатьма критеріями на комбінаторних конфігураціях вимагає розробки ефективних методів та алгоритмів оптимізації, які дозволяють розв'язувати як окремі задачі, так і цілі їх класи. Це робить необхідним вивчення властивостей указаних оптимізаційних задач, що в свою чергу приводить до дослідження властивостей множин їх розв'язків та областей визначення. Таким чином, виникає необхідність в використанні, подальшому дослідженні та розвитку більш широкої і більш загальної теорії та розробці нових методів розв'язання такого класу задач.

Дослідження в області багатокритеріальної оптимізації в даний час особливо інтенсивно стимулюються практичними потребами і розвитком комп'ютерних інформаційних технологій. Тому з'явилась велика кількість праць, присвячена задачам багатокритеріальної оптимізації [31, 33, 42, 64, 65, 66–85, 88, 101–105, 108, 113–119, 136–139, 143–145, 159, 166–171, 173, 185–189, 209–212, 221–224, 280, 295, 308, 319, 323, 330]. Задачі з багатьма критеріями можна розглядати як умовні так і безумовні. В попередніх розділах зроблено задальну постановку екстремальної безумовної задачі на комбінаторних конфігураціях та запропоновано новий метод направленого структурування, що ґрунтується на використанні графів комбінаторних конфігурацій.

Даний розділ присвячено дослідженню математичних моделей і методів розв'язання екстремальних задач з урахуванням багатокритеріальності. Особливістю цих задач є оцінка якості розв'язку за наявності декількох, як правило несумісних критеріїв. Залежно від постановки задачі, різні критерії входять до складу векторної цільової функції в різних комбінаціях, породжуючи тим самим різні типи задач багатокритеріальної оптимізації.

В умовах багатокритеріальності вибір найдоцільнішого розв'язку здійснюється з множини векторно-непорівнюваних, конкуруючих альтернатив. Створення теоретично обгрунтованих методів дослідження множини альтернатив з урахуванням властивостей цих множин дозволяє одержувати раціональні підходи до їх розв'язання. Реалізація цих методів на комп'ютері значно зменшує витрати в процесі ухвалення рішення. Розв'язки, одержані цими методами, з урахуванням взаємозв'язку критеріїв, приводять до істотної економії засобів що витрачаються на них і ресурсів. Тому проблема відшукання множини альтернатив для багатокритеріальних задач та побудова нових методів для їх знаходження має велике практичне і теоретичне значення та потребує подальшого дослідження і удосконалення.

Розглянемо постановку екстремальної задачі комбінаторної оптимізації, що об'єднує проблему багатокритеріальності та комбінаторні властивості розв'язків з додатковими умовами.

7.1. Математична постановка екстремальної задачі за умови багатокритеріальності та метод її розв'язання

Визначимо екстремальну багатокритеріальну задачу як обчислювальну проблема, у якій задана множина альтернатив $X=\{x\}$, векторна цільова функція $F(x): X \to R$, де $F(x)=\left(f_1(x),\ldots,f_i(x),\ldots,f_l(x)\right)$, що складається із часткових критеріїв $f_i(x) \to max,\ i \in N_l$. Потрібно знайти альтернативу

$x^0 \in X$, на якій ця цільова функція приймає екстремальне значення: $F\left(x^0\right) = \underset{x \in X}{extr}\, F\left(X\right)$, $extr \in \{min, max\}$. Альтернативи $x \in X$ називають допустимими розв'язками, x^0 – оптимальний розв'язок, $X = \{x\}$ – множиною допустимих розв'язків. Тоді $X = \{x\}$ – визначається деякою комбінаторною конфігурацією, елементи якої генеруються новими методами, що запропоновані в другому розділі.

Зокрема, в залежності від властивостей задачі – вигляду часткових критеріїв, додаткових обмежень, використовуються методи генерування комбінаторних об'єктів: рекурсивний, метод переміщення максимального елементу.

Як відомо, одним з основних, фундаментальних понять багатокритеріальної оптимізації взагалі є поняття оптимального по Парето, тобто ефективного розв'язку та оптимального по Слейтеру – слабо ефективного розв'язку.

Визначення 7.1. Допустимий розв'язок $x^0 \in X$ розглядуваної багатокритеріальної задачі називається ефективним або Парето-оптимальним, якщо не існує такого розв'язку $x \in X$, що $F\left(x\right) \geq F\left(x^0\right)$, $F\left(x\right) \neq F\left(x^0\right)$, тобто для якого мають місце нерівності

$$f_k\left(x\right) \geq f_k\left(x^0\right),\ k \in N_l,$$

причому хоча б одна з цих нерівностей строга.

Головним завданням є відшукання ефективного розв'язку задачі.

Серед методів пошуку Парето-оптимальних розв'язків найбільшого розповсюдження отримали так звані алгоритми лінійної згортки. Ці алгоритми базуються на наступному відомому факті: при визначеній цільовій вектор-функції елемент, що мінімізує (максимізує) лінійну згортку $\sum_{i=1}^{l} \mu_i F\left(x_i\right)$, є Парето-оптимальними. З огляду на специфіку області допустимих розв'язків екстремальної багатокритеріальної задачі на комбінаторній конфігурації, слід зазначити, що функція:

$$F(x) = \left(f_1(x), \dots, f_l(x) \right) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i f(x_i)$$

є зростаючою за відношенням $\geq$ на деякій комбінаторній конфігурації, якщо всі числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ додатні. У випадку, якщо який-небудь з коефіцієнтів $\mu_i = 1$, а всі інші, $\mu_j = 0$, $i \neq j$, $i, j \in N_l$, то розглядається однокритеріальна задача з i-ю цільовою функцією. Отже, максимізація функції $\sum_{i=1}^{l} \mu_i f(x_i)$ на комбінаторній конфігурації приводить до знаходження Парето-оптимальних розв'язків.

Продовжуючи дослідження і розвиваючи отримані в попередніх розділах результати, запропонований підхід до розв'язання задачі $Z(F(x), X)$, де $F(x)$ – вектор-функція, X – множина допустимих розв'язків, оснований на лінійній згортці (агрегації) часткових критеріїв задачі і подальшому зведенні пошуку розв'язку початкової задачі до розв'язку серії скалярних (однокритеріальних) задач, перевірки оптимальності отриманих розв'язків. Методи розв'язків однокритеріальних задач основані на ідеях декомпозиції, відтинаючих площин Келлі, релаксації та методі направленого структурування.

Для розв'язування екстремальних багатокритеріальних задач застосуємо новий метод направленого структурування, який описаний і реалізований для розв'язування однокритеріальних екстремальних задач в попередніх розділах.

Підхід до розв'язування багатокритеріальної екстремальної задачі на основі методу направленого структурування полягає у наступному:

1) багатокритеріальна задача зводиться до однокритеріальної за допомогою лінійної згортки: для цього задаються вагові додатні коефіцієнти $\mu_j, j \in N_l$, які визначають ступінь важливості кожного критерію, і максимізується лінійна комбінація цільових функцій, тобто розв'язується задача:

$$Z\left(f, G^{s} \right),$$

де $f(x) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i \langle c_i, x \rangle$, $\mu_i \ge 0$, $i \in N_l$, $\sum_{i=1}^{l} \mu_i = 1$, $G^{s} = R^{n}$.

2) генеруються у певній послідовності всі елементи заданої комбінаторної конфігурації;

3) будується на її елементах орієнтований граф, де дуга відповідає спаданню значень цільової функції;

4) будується поліноміальний алгоритм для розв'язування задачі на частково упорядкованих вершинах графа;

5) визначається множина Парето-оптимальних розв'язків.

Дослідимо властивості області допустимих розв'язків.

7.2. Властивості області допустимих розв'язків багатокритеріальних задач

В попередньому пункті розглянуто означення Парето-оптимального розв'язку. Крім цих розв'язків розглянемо розв'язок оптимальний по Слейтеру – слабо ефективний.

Визначення 7.2. Розв'язок $x^{0} \in X$ слабо ефективний, ефективний по Слейтеру, якщо не існує такого розв'язку $x \in X$, що $x > x^{0}$, тобто для якого мають місце нерівності

$$F_k(x) > F_k\left(x^{0}\right), k \in N_n.$$

Множину ефективний розв'язків будемо позначати через $P_F(X)$, а слабо ефективних через $Sl_F(X)$.

Розрізняють також множину строго ефективних розв'язків: розв'язок $x^{0} \in X$ строго ефективний, ефективний по Смейлу, якщо не існує такого розв'язку $x \in X$, що $x > x^{0}$, $x \ne x^{0}$ тобто для якого мають місце нерівності

$$F_k(x) \ge F_k\left(x^{0}\right), k \in N_n.$$

Відповідно множину строго ефективних розв'язків позначають $Sm_F(X)$ і для всіх вище зазначених множин, згідно [172, 192, 206, 207, 210, 223] виконується співвідношення

$$Sm_F(X) \subseteq P_F(X) \subseteq Sl_F(X). \tag{7.1}$$

В багатокритеріальній задачі кожний розв'язок $x \in X$ повністю характеризується своєю оцінкою $y = F(x)$, і тому вибір оптимального розв'язку зводиться до вибору оптимальної оцінки із множини Y всіх допустимих оцінок. Тоді є важливим задача порівняння за перевагою векторних оцінок, тобто значення векторного критерію $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$. Зрозуміло, що найбільш просто співставити за перевагою ті векторні оцінки, які відрізняють одна від одної лише однією компонентою. Тому інформація за перевагою змін значень одного часткового критерію при фіксованих значеннях всіх останніх критеріїв є найбільш доступною і достовірною, а тому як раз таку інформацію доцільно одержувати в першу чергу і використовувати для аналізу задачі.

Розроблено багато різних принципів прийняття рішень в ситуаціях такого роду. Але найбільш цікавими є традиційні, які пов'язані із виділенням із всієї множини розв'язків та оцінок $Y = \{ y = \Phi(a) \,|\, a \in E \}$ множини непокращуваних або оптимальних по Парето, оптимальних по Слейтеру, оптимальних по Смейлу векторів.

Для подальшого викладу матеріалу розглянемо екстремальну багатокритеріальну задачу на комбінаторній конфігурації перестановок, враховуючи, що:

$$M_n(A) = conv\, P_n(A),$$

згідно [87, 239, 242], будемо розглядати елементи множини перестановок як вершини графа многогранника перестановок, вигляд якого відоми і представлений в другому і третьому розділах для однокритеріальних екстремальних задач як орієнтований граф за значеннями лінійної цільової функції.

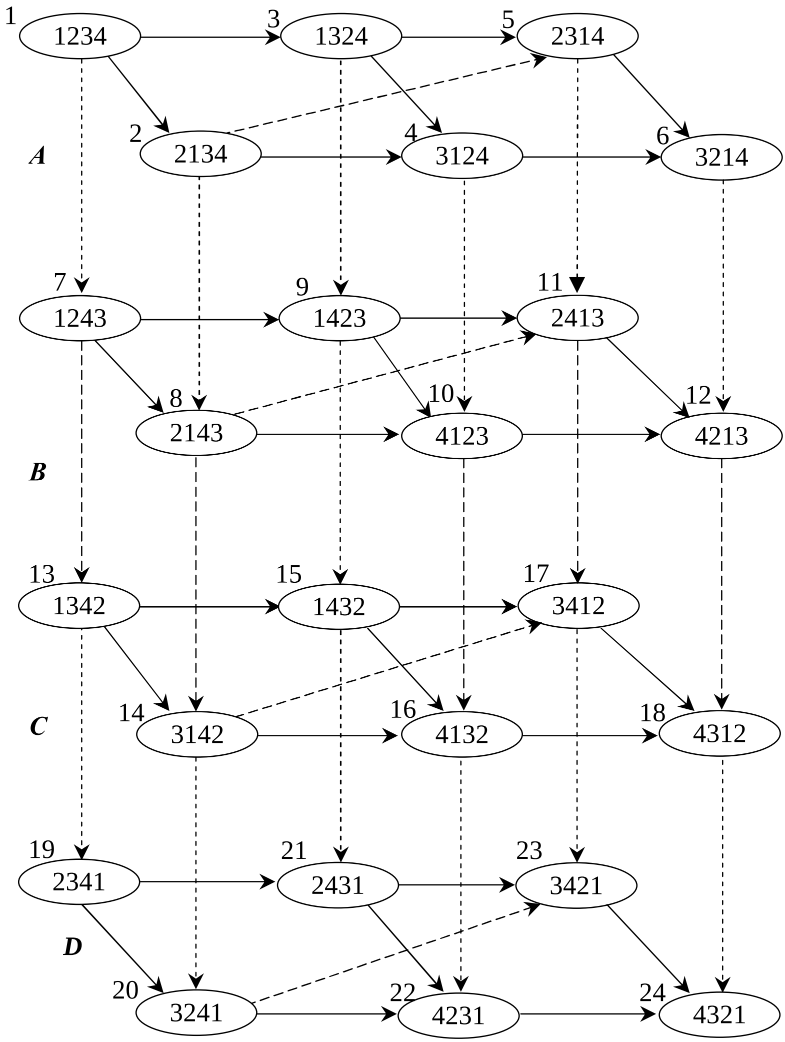

Рис. 7.1. Представлення графа перестановок $G(P_n)$ для $n=4$

Тоді можна сформулювати задачу $Z(F,X)$ максимізації деякого векторного критерію $F(x)$ на множині *X*, причому кожній точці $a \in P_n(A)$ буде відповідати точка $x \in X$, така, що $F(x) = \Phi(a)$.

$$Z(F,X): max\{F(x) \mid x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$, $f_i : R^n \to R^1, i \in N_l$, X – непорожня множина у R^n, що визначається таким чином $X = vert\, M_n(A)$.

Оскільки для багатокритеріальних екстремальних задач на першому етапі метод направленого структурування зводить задачу до однокритеріальної, то зрозуміло, що можна використовувати орієнтований граф, представлений на рис. 7.1 для подальшого знаходження розв’язку багатокритеріальної задачі.

Для комбінаторних багатокритеріальних задач розв’язок представляє узагальнення поняття точки максимуму числової функції: розв’язок Парето-оптимальний, якщо значення кожного із критеріїв можна поліпшити лише за рахунок погіршення значень інших критеріїв.

Властивостям і методам відшукання Парето-оптимальних розв’язків присвячено досить багато літератури, але для задачі $Z(F,X)$ комбінаторної оптимізації необхідно врахувати специфіку й комбінаторні властивості області допустимих розв’язків, тому є актуальним розглянути дане питання.

З множини розв’язків X необхідно вибрати такі, для яких виконувалася б умова належності комбінаторній конфігурації перестановок $x \in P_{nk}(A)$ і які були б «кращі» ніж інші. Визначимо оптимальні розв’язки, тобто такі, які мають переваги над множиною інших розв’язків. Прямий перебір деякого найкращого розв’язку, як правило є трудомістким. Тому визначемо правило вибору найкращого розв’язку з двох даних.

Визначення 7.3. Якщо з двох заданих розв’язків x_1 і x_2 множини X, вибирається розв’язок x_1, то розв’язок x_1 переважає над розв’язком x_2.

Всі пари вигляду (x_1, x_2), де x_1, $x_2 \in X$, для яких розв’язок x_1 переважає, над розв’язком x_2, утворюють деяку множину.

Відношення строгої переваги, що використовується при побудові множини позначимо символом $\succ$.

Відношення $\succ$ повинне бути іррефлексивним, також слід вважати відношення $\succ$ асиметричним, оскільки інакше можуть одночасно виконуватися співвідношення $x_1 \succ x_2$ і $x_2 \succ x_1$, що суперечить означенню.

У багатьох випадках доцільно припускати введене відношення $\succ$ ще і транзитивним. Транзитивність відношення означає, що розв'язок x_1 переважає перед x_2, а $x_2 \succ x_3$, тобто x_2 переважає над x_3, то з двох розв'язків x_1 і x_2 буде вибрано x_1.

Множину всіх оптимальних розв'язків множини X позначатимемо через $opt_{\succ}X$. Залежно від структури X і виду відношення $\succ$ множина $opt_{\succ}X$ може містити єдиний елемент, скінченну або нескінченну множину елементів, а також не містити жодного елементу. Якщо врахувати комбінаторну природу множини допустимих розв'язків задачі $Z(F,X)$, то $opt_{\succ}X$ – є скінченною множиною, елементи якої є точки вибраної комбінаторної конфігурації, зокрема розміщень, перестановок, тобто $x \in P_{nk}$, чи $x \in A_{qk}^n$ та ін.

Отже для задачі $Z(F,X)$ множина $opt_{\succ}X$ містить принаймні два елементи. Розглянемо два довільні оптимальні розв'язки x_1 і x_2. Оскільки передбачено, що розв'язки є оптимальними, то для них не може виконуватися відношення переваги $\succ$. Таким чином, згідно зазначеної умови, для розв'язків може виконуватися лише одне з трьох наступних співвідношень: $x_1 \succ x_2$, або $x_2 \succ x_1$, або рівні один одному.

Сформулюємо теорему, яка гарантує існування оптимальних розв'язків для комбінаторних багатокритеріальних задач оптимізації $Z(F,X)$.

Теорема 7.1. Так як множина допустимих розв'язків $X = vert\,M(A) \cap D$ задачі $Z(F,X)$ не порожня і містить скінченне число елементів, а відношення $\succ$ асиметричне і транзитивне, то множина оптимальних розв'язків непуста, тобто $opt \succ X \neq \varnothing$.

Доведення цього твердження носить конструктивний характер і його можна сформулювати у вигляді алгоритму [191]:

Введемо позначення $X = X_1 = \left\{x_{11},\ x_{12},\ \dots,\ x_{1n_1}\right\}$.

Нехай $n_1 = 1$, то $X_1 = \left\{x_{11}\right\} = opt_{\succ} X_1$. Тому далі вважатимемо $n_1 > 1$.

Перший крок алгоритму полягає в попарному порівнянні розв'язку x_{11} з кожним з решти розв'язків множини. Якщо для деякого $i \in \left\{2, 3,\ \dots,\ n_1\right\}$ виконується співвідношення $x_{11} > x_{1i}$, то розв'язок x_{1i} з множини X_1 видаляють; і він не може бути оптимальним. Інакше, тобто коли $x_1 \geq x_{1i}$, або $x_{1i} > x_{11}$ то розв'язок x_{1i} зберігають. Якщо ні для якого $i = 2, 3, \dots, n_1$ не виконалось співвідношення $x_{1i} > x_{11}$, то розв'язок x_{11} є оптимальним і його потрібно запам'ятати. Множину розв'язків, що залишилася в результаті вилучення, позначимо через:

$$X_2 = \left\{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}\right\}, n_2 < n_1.$$

Якщо $X_2 = \varnothing$, то розв'язок x_{11} оптимальний (він зберігається в пам'яті), оскільки через асиметричність відношення $\succ$ із співвідношення $x_{11} \succ x_{1i}$ випливає, що $x_{1i} > x_{11}, i = 2, 3, \dots, n_1$, не може мати місця. В такому випадку процедура відшукання множини $opt_{\succ} X_1$ закінчена. Якщо ж $X_2 \neq \varnothing$, то переходимо до наступного кроку алгоритму.

Другий крок аналогічний першому і полягає в попарному порівнянні розв'язку x_{21} з кожним із розв'язків $x_{22}, \dots, x_{2n_2}$. Всі розв'язки x_{2i}, для яких виконується відношення переваги $x_{21} > x_{2i}$ для x_{21} із множини X_2 виключають. Крім того, видаляють розв'язок x_{21}. При цьому, якщо ні для якого $i = 2, 3, \dots, n_2$ не виконується співвідношення $x_{2i} > x_{21}$, то $x_{21} \in opt_{\succ} X_2$. Більш того $x_{21} \in opt_{\succ} X_1$ то розв'язок x_{21} слід запам'ятати. Насправді, співвідношення $x_{11} \succ x_{21}$ не може мати місця, оскільки розв'язок x_{21} не був видалений з X_1 на першому кроці. Співвідношення $x_{1i} \succ x_{2i}$ для $x_{1i} \in X_1 \setminus X_2, i \neq 1$ також не може бути виконано, оскільки $x_{11} \succ x_{1i}$ і відношення $\succ$ транзитивне: з $x_{11} \succ x_{1i}$ і $x_{1i} \succ x_{21}$ слідує, що $x_{11} \succ x_{21}$. Множину розв’язків, що залишилася, після вилучення позначимо $X_3 = \left\{x_{31}, x_{32}, \ldots, x_{3n_3}\right\}, n_3 < n_2$. Якщо $X_3 \neq 0$, то переходимо на наступний крок і т. д.

Алгоритм, згідно транзитивності відношення $\succ$, дає можливість знайти розв’язок x_{k1}, оптимальний на множині X_k, тобто $opt_{\succ} X_1$, а значить, і на початковій множині $X = vertM\left(A\right) \cap D$.

Оскільки множина $X = vertM\left(A\right) \cap D$ містить скінченне число елементів, то через скінчене число кроків процедура закінчить свою роботу. Розв’язки, що зберігаються в пам’яті, утворюють шукану непусту множину $opt_{\succ} X$.

Можна оцінити «трудомісткість» сформульованого алгоритму, тобто визначити якнайменше і найбільш можливе число попарних порівнянь, які потрібно зробити для знаходження всієї множини $opt_{\succ} X$.

Найменше число порівнянь $n_1 - 1$ має місце, якщо $x_{11} \succ x_{1i}$, $i = 2, 3, \ldots, n_1$. У «найдовшому варіанті» доведеться порівнювати між собою всі можливі пари розв’язків, і тому максимальне число порівнянь рівне $n_1\left(n_1 - 1\right)/2$.

Теорема 7.2. Елементи множин $P_F\left(X\right)$ – Парето-оптимальних, $Sl_F\left(X\right)$ – слабо ефективних розв’язків багатокритеріальної комбінаторної задачі вигляду $Z\left(F, X\right)$ на перестановках P_n знаходяться у вершинах графа $G\left(A\right)$ переставного многогранника $M_n\left(A\right)$.

Доведення. Враховуючи співвідношення (7.1) між введеними множинами ефективних розв’язків і той факт, що множина допустимих розв’язків X є підмножиною множини перестановок P_n, справедливе наступне співвідношення:

$$P_F\left(X\right) \subseteq Sl_F\left(X\right) \subset P_n\left(A\right). \tag{7.2}$$

Як уже було зазначено, відповідно до [242, 245] множина перестановок P_n збігається з множиною вершин загального переставного многогранника $vert\, M_n(A)$. Таким чином, справедливе включення (7.2). Теорема доведена.

Нехай функції $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ є лінійними, тобто $f_i(x) = \langle c_i, x\rangle, i \in N_l$. Важливі властивості допустимої області X і множин різних видів ефективних розв'язків, зазначені в теоремі 7.2, а також лінійність функцій векторного критерію дозволяють звести розв'язання задачі $Z(F, X)$ до розв'язання задачі $Z(F, G)$ визначеній на допустимій множині $G = M \bigcap D$.

При встановленні різних видів ефективності розв'язків, якщо виконуються необхідні умови оптимальності розглянутого розв'язку, то гарантувати його ефективність не можна, однак, якщо ці умови не виконуються, то даний розв'язок не ефективний. Якщо використовуються достатні умови, то розв'язок, що їх задовольняє, ефективний, у протилежному випадку питання про ефективність розв'язків залишається відкритим. Якщо ж застосовуються необхідні і достатні умови, то питання вирішується однозначно: розв'язок ефективний тоді і тільки тоді, коли він задовольняє цим умовам.

Як було зазначено, наряду з множиною різних видів оптимальності розв'язків є доцільним розглянути поняття оптимальних оцінок багатокритеріальних комбінаторних задач, які відіграють важливу роль у теорії багатокритеріальної оптимізації.

Одним із основних понять Парето-оптимального розв'язку багатокритеріальних задач є поняття оцінки. Тобто, у багатокритеріальній задачі кожний розв'язок $x \in X$ повністю характеризуються своєю оцінкою $y = (y_1, \ldots, y_l)$, де $y_i = f_i(x)$, $i \in N_l$. Тому вибір оптимального розв'язку зводиться до вибору оптимальної оцінки з множиною Y всіх досяжних оцінок.

Множина оцінок для екстремальної багатокритеріальної задачі оптимізації $Z(F, X)$ визначається таким чином:

$$Y = F(X) = \left\{ y \in R \middle| y = F(x), x \in E \right\}.$$

Отже, вибір розв'язку з елементів комбінаторної конфігурації E рівносильний вибору відповідної оцінки з Y. Розглянемо властивості Парето-оптимальних оцінок.

Так як множина Парето-оптимальних розв’язків у багатокритеріальних комбінаторних задача позначена $P_F\left(X\right)$, тоді множину Парето-оптимальних оцінок позначимо $P\left(F\right)$.

У багатокритеріальних задачах порівнюються по перевазі векторні оцінки, тобто значення векторного критерію $F\left(f\left(x\right)\right)=\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right),\ldots, f_l\left(x\right)\right)$.

Наряду з множиною Парето-оптимальних розв’язків екстремальної багатокритеріальної задачі розглядається множина парето-оптимальних векторів в наступних роботах [172, 192].

Визначення 7.4. Вектор $F\left(x^*\right)$ для Парето-оптимального розв’язку x^* називають Парето-оптимальним вектором розв’язку або Парето-оптимальною оцінкою, а множина всіх таких векторів – множиною Парето-оптимальних векторів або оцінок.

Позначимо

$$P\left(F\right)=f\left(P_F\left(X\right)\right)=\left\{F\left(x^0\right)\in Y \mid \exists\, x^0\in P_F\left(X\right)\right\},$$

де Y означає множина можливих векторів, тобто $Y=F\left(x\right)$.

Природно, що найбільш просто порівнювати по перевазі ті векторні оцінки, які відрізняються один від одного лише однією компонентою [117, 170, 189]. Тому інформація про переваги зміни значення одного приватного критерію при фіксованих значеннях всіх інших критеріїв є найбільш доступна і достовірна, і саме її доцільно визначати в першу чергу й використати для аналізу задачі, але такі ситуації бувають рідко, тому є необхідним більш глибоко досліджувати структуру області допустимих розв’язків.

Для подальшого розгляду поняття Парето-оптимального розв’язку й оцінки комбінаторних багатокритеріальних задач оптимізації сформулюємо:

Твердження 7.1. Максимум лінійної функції однокритеріальної комбінаторної задачі:

$$f\left(x\right)=\sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \tag{7.3}$$

де $c_{\alpha_1} \geq ... c_{\alpha_s} \geq 0 > c_{\alpha_{s+1}} \geq ... \geq c_{\alpha_k}$, $s \in N_k$, $\alpha \in N_k$, на комбінаторній множині E (перестановок, розміщень) досягається в точці $x^* = \left(x_1^*,...,x_k^*\right) \in E$, що задовольняє умовам:

$$x_{\alpha_i}^* = a_i \forall i \in N_s; \; x_{\alpha_{s+i}}^* = a_{\eta-r+i} \forall i \in N_r,$$

якщо елементи мультимножини A впорядковані в такий спосіб:

$$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \ldots \geq a_{i_k}, \tag{7.4}$$

де r, s-константи, що задовольняють умовам $r + s = k$, $r, s \in N_k$, а мінімум лінійної функції однокритеріальної комбінаторної задачі $f(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$, в точці $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_k^*\right) \in E$, що задовольняє умовам:

$$x_{\alpha_i}^* = a_i \forall i \in N_s; \; x_{\alpha_{s+i}}^* = a_{\eta-r+i} \forall i \in N_r,$$

якщо елементи мультимножини A впорядковані таким способом:

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_k},$$

де r, s-константи, що задовольняють умовам $r + s = k$, $r, s \in N_k$.

Позначимо x^0 – оптимальний розв'язок, то $f\left(x^0\right) = y^0$ – оптимальна оцінка даного розв'язку, тоді $F\left(f(x)\right) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x)\right)$ можна записати таким способом $F(y) = (y_1, y_2, ..., y_l)$.

Визначення 7.5. Функція $F(y) = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$, що визначена на множині оцінок $Y \subset R^m$, є зростаючою по відношенню $\geq$, якщо з виконання нерівності $y \geq y'$ для векторів $y, y' \in Y$, завжди виконується нерівність $F(y) \geq F(y')$.

Це означення являє собою узагальнене поняття зростаючої функції однієї змінної на випадок функції багатьох змінних.

Теорема 7.3. Якщо функція $F(y)$ зростає по відношенню $\geq$ і x^0 – точка максимуму функції $F\left(f(x)\right)= =F\left(f_1(x), f_2(x),\dots, f_l(x)\right)$ на комбінаторній конфігурації перестановок, то $F\left(x^0\right)\in P(A)$, що означає $x^0 \in P_F(X)$.

Доведення. Якщо x^0 – точка максимуму функції $F\left(f(x)\right)=F\left(f_1(x), f_2(x),\dots, f_l(x)\right)$, то відповідно до означення Парето-оптимального розв'язку, вона належить множині Парето-оптимальних розв'язків, а по означенню Парето-оптимальних оцінок виконується наступне співвідношення $f\left(x^0\right)\in P_y(F,X)$.

Теорема 7.3 сформульована в термінах розв'язків. Але її можна переформулювати у термінах оцінок.

Теорема 7.4. Нехай функція $F(y)$ визначена на множині оцінок $Y\subset R^m$. Для того, щоб точка $y^0\in Y$ була Парето-оптимальною оцінкою, тобто $y^0\in P(F)$ для екстремальної багатокритеріальної задачі оптимізації $Z(F,X)$, достатньо, щоб вона була точкою максимуму на множині Y функції $F(y)$, що зростає по відношенню $\geq$, де Y – множина оцінок.

Доведення. Доведення випливає з теореми 7.3. Нехай, за умовою $y^0\in Y$ і $F\left(y^0\right)\geq F(y)$ для всіх $y\in Y$. Припустимо обернене: що для деякої оцінки $y'\in Y$ виконується нерівність $y'\geq y^0$. Звідси, оскільки функція F зростаюча, одержуємо нерівність $F(y')>F\left(y^0\right)$, що суперечить попередній. У свою чергу, якщо максимум досягався в точці, що належить вершині многогранника, тобто $x^0\in M$, то вона є Парето-оптимальним розв'язком задачі $Z(F,X)$, згідно теореми 7.3 і співвідношення $F\left(x^0\right)=y^0$, тоді точка $y^0\in P(F)$. Теорема доведена.

Серед методів відшукання Парето-оптимальних розв'язків найбільшого розповсюдження одержали так звані алгоритми лінійної згортки. Ці алгоритми базуються на наступному відомому факті: при додатньо-визначеній цільовій вектор-функції елемент, що мінімізує (максимізує) лінійну згортку $\sum_{i=1}^{l} \mu_i F(x_i)$, є Парето-оптимальними. З огляду на специфіку області допустимих розв'язків комбінаторної задачі, слід зазначити, що функція $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_l(x)) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i f(x_i)$ є зростаючою по відношенню $\geq$ на комбінаторній конфігурації розміщень, перестановок, якщо всі числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ додатні. Отже, максимізація функції $\sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x)$ на комбінаторній множині E (розміщень, перестановок) приводить до знаходження Парето-оптимального розв'язків.

Зокрема, для багатокритеріальних безумовних задач на комбінаторній конфігурації перестановок встановлено наступний факт в вигляді теореми.

Теорема 7.5. Розв'язок $x^0 \in S$ комбінаторної багатокритеріальної задачі $Z(F,S)$ є Парето-оптимальним, якщо існують числа $\mu_i \geq 0, i \in N_l$, $\sum_{i=1}^{l} \mu_i = 1$ такі, що максимізують лінійну згортку

$$\sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x^0) = \max_{x \in S} \sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x)$$

критеріїв $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x)$ на заданій комбінаторній конфігурації перестановок.

Доведення. Множина допустимих розв'язання X задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації $Z(F,X)$ є скінченою і обмеженою, тому що $X = vertM(A) \cap D$. Тоді, відповідно до твердження, існує розв'язок $x^0 \in X$ задачі $Z(F,X)$, який є оптимальним, а відповідно Парето-оптимальним для комбінаторної багатокритеріальної задачі. Теорема доведена.

Теорема 7.5 показує, що при деяких припущеннях, підбираючи коефіцієнти $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$, будь-який Парето-оптимальний розв'язок можна одержати в результаті розв'язання відповідної однокритеріальної задачі максимізації. Аналогічний висновок справедливий і для оцінок.

Твердження 7.1. Якщо компоненти вектор-функції

$$F(x)=\left(f_1(x),\ldots,f_l(x)\right)$$

неперервні на деякій комбінаторній конфігурації, то $P(F)\neq\varnothing$.

Справедливість даного твердження очевидно.

Твердження 7.2. Для комбінаторної багатокритеріальної задачі $Z(F,X)$ існує хоча б один Парето-оптимальний розв'язок й, відповідно, хоча б один Парето-оптимальний вектор, тобто $P_F(X)\neq\varnothing,\ P(F)\neq\varnothing$.

З вище сформульованих теорем і тверджень випливає наступний спосіб відшукання одного з множини Парето-оптимальних розв'язків: знайти точку, що реалізує максимальне значення функції $\sum\limits_{i=1}^{l} f_i(x)$ на множині допустимих розв'язання X [191, 192].

Враховуючи вище сказане, можна визначити умови знаходження розв'язку багатокритеріальної задачі $Z(F,X)$ без додаткових обмежень. Таку багатокритеріальну задачу назвемо багатокритеріальною безумовною задачею з лінійними критеріями на комбінаторній конфігурації. Тоді можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 7.3. Якщо P_i – множина перестановок $\alpha^i=\left(\alpha_1^i,\ldots,\alpha_k^i\right)$ елементів множини перших натуральних чисел, що задовольняють умові:

$$c^i_{\alpha^i_1}\geq c^i_{\alpha^i_2}\geq\ldots\geq c^i_{\alpha^i_s}\geq 0> c^i_{\alpha^i_{s+1}}\geq\ldots\geq c^i_{\alpha^i_k},$$

то множина абсолютних розв'язків задачі $Z(F,X)$ не порожня, якщо не порожня множина, що є перетином множини розв'язків, знайдених для всіх критеріїв даної задачі:

$$\bigcap_{i=1}^{l} R_i = R\neq\varnothing.$$

Розглянуте вище твердження не дає відповіді на питання: які розв'язки знайдені – ефективні, слабо ефективні або строго ефективні.

Сформулюємо наступне твердження.

Твердження 7.4. Оптимальні розв'язки багатокритеріальних комбінаторних задач на комбінаторних конфігураціях знаходяться у вершинах графа многогранника, де для множини перестановок $P_n = vert\, M_n(A)$, і визначають Парето-оптимальну множину.

Доведення. Якщо розглядати багатокритеріальну комбінаторну задачу $Z(F,X)$ без додаткових обмежень, то згідно твердження 7.5 оптимальний розв'язок – це точки комбінаторної конфігурації, що визначаються як вершини графа. Як відомо $vert\, M_{nk}(A) = P_{nk}$, то при накладенні додаткових умов *D*, ефективні розв'язки також будуть у вершинах, оскільки умови, які утворюють многогранну множину *D* тільки звужують область, яка описує область допустимих розв'язків $X = vert\, M \cap D$. Зрозуміло, що випадок $X = \varnothing$ не розглядається.

Теорема доведена.

Завдяки наявності вказаного вище прямого зв'язку між множиною ефективних розв'язків і Парето-оптимальних векторів та описаних вище властивостей можна застосувати алгоритм знаходження множини Парето-оптимальних векторів для задачі комбінаторної оптимізації $Z(F,X)$, аналогічний [119].

Алгоритм

Крок 1. Для всіх можливих точок $x = (x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, де P_n – комбінаторна конфігурація перестановок визначаємо множину можливих векторів $Y = \{y^1, y^2, \ldots, y^l\}$.

Крок 2. Утворюємо множину Парето-оптимальних векторів, вибравши $P(Y) = f(P_f(X))$ ті, які співпадають з множиною розв'язків *Y*.

Крок 3. Перевіряємо виконання нерівності $y^i \geq y^j$, якщо воно виконується, то перейти до кроку 4, інакше перейти до кроку 5.

Крок 4. Видаляємо з поточної множини векторів $P(Y)$ вектор y^j, переходимо до кроку 5.

Крок 5. Перевіряємо виконання нерівності $j < i$, якщо вона виконується, то покладаємо $j = j+1$ і переходимо до Кроку 7. У іншому випадку необхідно перейти до кроку 8.

Крок 7. Перевіряємо справедливість нерівності $y^i \geq y^j$, якщо вона виконується, переходимо до кроку 7, інакше повертаємося до кроку 5.

Крок 7. Видаляємо з поточної множини векторів $P(Y)$ вектор y^i і переходимо до кроку 8.

Крок 8. Перевіряємо виконання нерівності $i < l-1$, якщо вона виконується, то покладаємо $i = i+1$, а потім $j = i+1$ і переходимо до кроку 3, інакше розрахунки закінчуються. Множина Парето-оптимальних векторів побудована повністю.

Суть алгоритму полягає у тому, що шукана множина Парето-оптимальних векторів утворюється послідовним видаленням завчасно відомих неоптимальних векторів.

Алгоритм ускладнюється, якщо область можливих розв'язків визначається не тільки комбінаторними умовами, які описують граф деякої комбінаторної конфігурації, а накладаються ще додаткові обмеження.

Досліджені розв'язки комбінаторної багатокритерійної задачі, їх властивості та підхід до знаходження ефективних оцінок дають можливість розробити загальний підхід до розв'язання багатокритеріальних задач на комбінаторних конфігураціях. Далі розглянемо багатокритеріальну задачу на комбінаторній конфігурації розміщень та застосування до її розв'язання методу направленого структурування.

7.3. Розв'язування екстремальних задач при умові багатокритеріальності за методом направленого структурування

У даному пункті розглядається випадок, коли X – комбінаторна множина розміщень. $F(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_l(x) \right)$ – векторний критерій, заданий на множині $A(B)$ розміщень, породжуваних деякою скінченною мультимножиною $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_q\}$. Тоді задача має вигляд: $Z(F,X)$.

Задача може містити також додаткові лінійні обмеження, які утворять опуклу многогранну множину $D\subset R^n$ вигляду:

$$D=\{x\in R^n \mid Gx\le H\},$$

де $G\in R^{m\times n}$, $H\in R^m$.

Як відомо, розміщенням з q елементів по n називається впорядкований набір з n елементів, який належать мульти-множині $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_q\}$.

Варто зазначити, що в цьому випадку поняття «оптимуму» має несуперечливе означення: допустимий розв'язок x^0 оптимальний, якщо він мінімізує (або максимізує) цільову функцію на

$$X : F(x^0,b)=\min_{x\in X} F(x,b)$$

або $F(x^0,b)=F(x^0,b)=\max_{x\in X} F(x,b),$ де X містить елементи множини розміщень $A(B)$.

Кожний елемент множини $A(B)$ є впорядкованим набором q відповідних дійсних чисел. Не втрачаючи спільності, упорядкуємо елементи мультимножини B по неспаданню таким способом: $b_1\le b_2\le\ldots\le b_q$. Тоді опуклою оболонкою загальної множини розміщень $A(B)$ є загальний многогранник розміщень $M=conv\,A(B)$ [87], який запишемо в наступному вигляді:

$$M=\left\{x\in R^n \middle| \sum_{j=1}^{|\omega|} b_j \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} b_{q-j+1} \ \ \forall\omega\subset N_n=\{1,\ldots,n\}\right\},$$

де $A(B)=vert\,M$.

Згідно [87] $x \in M = conv\, A(B)$ є вершиною многогранника розміщень M тоді й тільки, коли він являє собою перестановку чисел $b_1, \ldots, b_s, b_{q-r+1}, \ldots, b_q$, де $0 \le s \le q,\ 0 \le r \le n,\ s + r = n$.

Враховуючи що, для переставного многогранника можна побудувати граф, за допомогою якого можна розглядати зміну значення цільової функції в точках – вершинах многогранника розміщень. Скористаємося наступною теоремою.

Многогранник розміщень $M = conv\, A(B) = M_q^n(B)$ при $n < q$ і будь-якому векторі $B = (b_1, b_2, \ldots, b_q)$ комбінаторно еквівалентний переставному многограннику $M_n(B)$ розмірності n.

З огляду на зв'язок між перестановками й розміщеннями, для елементів множини розміщень можна побудувати подібний граф многогранника розміщень $M_q^n(B)$. Далі $M_q^n(B) = M$.

Нехай існує граф $G(B)$ комбінаторної конфігурації розміщень *M*.

Розглянемо приклад для розміщення з 4 елементів по 3. Опишемо побудову графа $G(B)$ для розміщення з 4 елементів по 3. Для зручності подальшого викладу і розуміння, елементи множини розміщення – точки пронумеруємо від 1 до 24 тому що їх буде саме 24, і будемо їх називати вершинами $p_i, i \in N_{24}$ графа $G(B)$, які будуть розміщатися на чотирьох підграфах $G_1(B),\ G_2(B),\ G_3(B),\ G_4(B)$, залежно від вибору елементів із множини *B*. Тоді для підграфів графа $G(B)$ виконуються наступні умови $X_1 \subseteq X,\ X_2 \subseteq X,\ X_3 \subseteq X,\ X_4 \subseteq X$, де X, X_i, $i \in N_4$ – множина вершин; $U_1 \subseteq U,\ U_2 \subseteq U,\ U_3 \subseteq U,\ U_4 \subseteq U$, де $U, U_i, i \in N_4$ – множина ребер. У підграфі $G_1(B)$, що розташований у верхній частині графа $G(B)$ вершини утворені з максимальних елементів мультимножини $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$, тобто (2, 3, 4), які утворюють елементи множини розміщень. Наступний підграф $G_2(B)$ можна побудувати шляхом заміни мінімального елемента на ще більш мінімальний, тобто вибирається підмножина (1, 3, 4) і генеруються вершини. Аналогічним чином будуються підграфи: $G_3(B)$, вершини яких утворюються шляхом генерування елементів (1, 2, 4) і $G_4(B)$ – вершини утворюються з (1, 2, 3). Далі розглянемо будь-який частковий критерій $f(x) = f_i(x)$, $i \in N_l$ вектор-функції $F(x)$.

Вектор коефіцієнтів функції $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle c_j, x \rangle$ позначимо $\vec{c} = (c_j)$, $j \in N_n$, де $c_1 \le c_2 \le ... \le c_n$, $i \in N_n$ для функції. Тоді значення функції $f(x)$ в довільній точці $p_i (1 \le i \le 24)$ визначається як скалярний добуток $f(p_j) = (p_j, c_j)$.

Далі розглянемо побудову вершин у підграфах. Слід зазначити, що граф $G(B)$ можна побудувати індуктивним способом, починаючи із двох перших елементів розміщення, аналогічно графу многогранника перестановок [60, 61]. Розглянемо одну цікаву властивість у вигляді леми, що будемо використовуватися для побудови графа.

Лема 7.1. Із двох суміжних вершин p_i, p_j графа розміщень *M* функція $f(x)$ приймає не менше (більше) значення для тієї вершини, у якій максимальний з двох елементів, що різняться, перебуває праворуч, за умови, що коефіцієнти цільової $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle c_j, x \rangle$ функції впорядковані таким чином $c_1 \le c_2 \le ... \le c_n$ $i \in N_n$.

Розглянемо вершини p_1 й p_2, які розміщені на деякому підграфі $G_1(B)$ графа $G(B)$. Нехай маємо вершину $p_1 = (2,3,4) \in G_1(B)$, тоді p_2 утворена із p_1 шляхом транспозиції елементів 1 і 2. Відповідно до леми 5.3 одержимо співвідношення значень цільової функції в цих точках: $f(p_1) \ge f(p_2)$. Якщо тепер у вершинах p_1, p_2 поміняти місцями елементи 2 і 3, то одержимо вершини p_3 й p_5, для яких виконується співвідношення $f(p_3) \ge f(p_5)$. Крім того, по лемі 7.1 одержуємо $f(p_1) \ge f(p_3)$ й $f(p_2) \ge f(p_5)$. Аналогічно, шляхом транспозиції елементів 1 і 3 одержимо з p_2 вершину p_4, а з p_4 транспозицією елементів 2, 3 вершину p_6. У результаті цих дій одержимо повний підграф $G_1(B)$, що містить всі вершини многогранника розміщень *M*, отримані з елементів $(2,3,4)$. Очевидно, що в підграфі $G_1(B)$ функція $f(x)$ приймає максимальне значення у вершині p_1 й мінімальне – у вершині p_6 (при впорядкуванні елементів множини розміщень і коефіцієнтів цільової функції за зростанням).

Шлях (маршрут) на кожному підграфі графа $G(B)$ визначається послідовністю вершин і ребер для першого підграфа $G_1(B)$ відповідно:

$$p_1 u_1 p_2 u_2 p_3 u_3 p_4 u_4 p_5 u_5 p_6 u_6,$$

для другого $G_2(B)$ – послідовністю

$$p_7 u_7 p_8 u_8 p_9 u_9 p_{10} u_{10} p_{11} u_{11} p_{12} u_{12},$$

для третього $G_3(B)$ – послідовністю

$$p_{13} u_{13} p_{14} u_{14} p_{15} u_{15} p_{16} u_{16} p_{17} u_{17} p_{18} u_{18},$$

для четвертого $G_4(B)$ –

$$p_{19} u_{19} p_{20} u_{20} p_{21} u_{21} p_{22} u_{22} p_{23} u_{23} p_{24} u_{24},$$

де $p_i \in vert\, M, u_i \in U, i \in N_{24}$.

Ребро u_i з'єднує вершину p_i з вершиною p_{i+1}, тобто виконується відношення інцидентності $\Phi(p_i, u_i, p_{i+1})$. У кожному підграфі $G_1(B)$, $G_2(B)$, $G_3(B)$, $G_4(B)$ можна визначити гамільтонів цикл, що містить всі вершини підграфа.

Для подальшого викладу матеріалу розглянемо деякі цікаві властивості описаного графа $G(B)$ розміщень згідно (рис. 7.2).

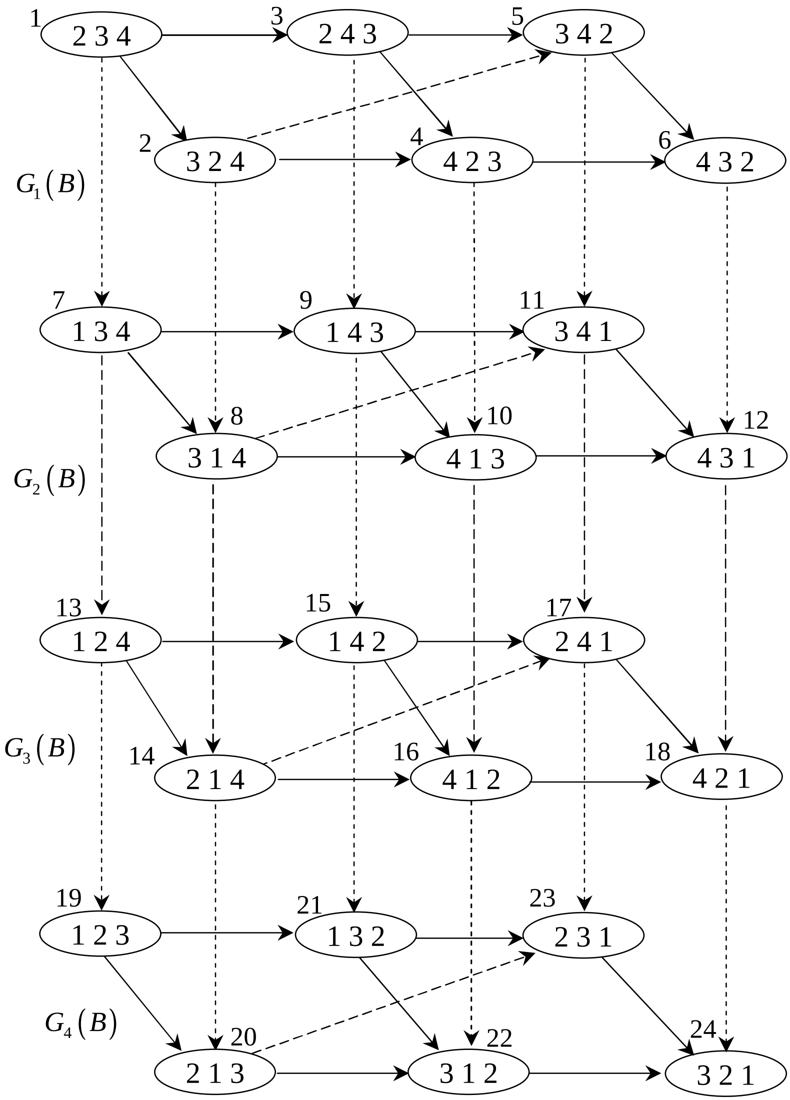

Рис. 7.2. Представлення графа послідовності розміщень

Говорячи про яку-небудь задачу на графі $G(B)$, її допустимий розв'язок позначимо через *x*, маючи на увазі, що $x=(X_x,U_x)$ – це підграф графа $G(B)$ з множиною вершин $X_x \subseteq X$, де X – множина вершин графа $G(B)$ і множиною ребер $U_x \subseteq U$ – множиною всіх допустимих розв'язків цієї задачі, який задовольняє певним умовам. Для розглянутої задачі множина всіх допустимих розв'язків $X = vertM$.

Оскільки побудова даного графу подібна графу перестановок, що описаний у роботі [60, 61] та другому розділі, то доцільно стверджувати, що граф $G(B)$ складається з підграфів, які є скінченними й ізоморфні між собою (рис. 7.2).

Граф $G(B)$ можна розглядати як скінченний граф, що є об'єднанням чотирьох підграфів $G_1(B)=(X_1,U_1)$, $G_2(B)=(X_2,U_2)$, $G_3(B)=(X_3,U_3)$, $G_4(B)=(X_4,U_4)$, де $X_1, X_2, X_3, X_4 \in vert\, M$ й для $G=(X,U)$, $vert\, M = X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$, $U = U_1 \cup U_2$.

Оскільки $G_1(B)=(X_1,U_1)$, $G_2(B)=(X_2,U_2)$, $G_3(B)=(X_3,U_3)$, $G_4(B)=(X_4,U_4)$ графи попарно ізоморфні, тому що між їх вершинами й ребрами існує взаємнооднозначна відповідність, то графи можна однаково зображувати графічно й відрізнятися вони будуть тільки мітками вершин, що й позначено на рис. 7.2.

Граф комбінаторної конфігурації розміщень орієнтований, як це представлено на рис. 7.2 згідно значень лінійної цільової функції

Для цього розглянемо шістки точок – вершини підграфів графа $G(B)$, які можна представити на площині у вигляді плоского (планарного) графа, так само як і для графа перестановок [60]. Причому для кожної шістки вершин можна побудувати гамільтонів шлях. Для довільних *n* граф $G(B)$ розкладається на підграфи, де найменший складається із множини вершин і дуг, що з'єднує ці вершини, та знову приводить до розгляду підграфів вигляду $G_1(B)=(X_1,U_1)$, $G_2(B)=(X_2,U_2)$, $G_3(B)=(X_3,U_3)$, $G_4(B)=(X_4,U_4)$.

З огляду на властивості графа $G(B)$ розглянемо алгоритм розв'язання задачі $Z(F,X)$ на графі розміщень. В алгоритмі використовується метод розв'язування підзадачі, що полягає в знаходженні множини точок – вершин графа за екстремальними значеннях цільових обмежуючих функцій $G_1(x)=\sum_{i=1}^{m} g_{ij}x_i = h_i$, $i \in N_m$, $j \in N_k$, які визначають додаткові обмеження на основі методу ділення відрізка навпіл (методу дихотомії) використовуючи властивості графа $G(B)$.

Алгоритм розв'язання векторної задачі на розміщеннях

Нехай $G(B)=(X,U)$ є граф, задана також множина підграфів $\{G_1,\dots,G_q\}$. Допустимий розв'язок x визначається як підграф $x=(X_x,U_x), X_x \subseteq X, U_x \subseteq U$, у якому кожний компонент зв'язності ізоморфний графу $G(B)$, де X – множина допустимих розв'язків на графі. З огляду на багатокритеріальність заданої задачі, зазначимо що її необхідно звести до однокритеріальної задачі.

Для цього застосуємо відомий алгоритм лінійної згортки. Ці алгоритми базуються на наступному відомому факті: при додатньо-визначеній вектор-цільової функції елемент $x \in X$, максимізуючий лінійну згортку $F^{\lambda}(x)$, є Парето-оптимальним. Далі загальна ідея запропонованого методу розв'язання задачі $Z(F,X)$ полягає в послідовному розгляді підзадач, кожна з яких містить функції з вектор-функції й функції-обмеження.

Алгоритм

Початковий крок. Вважаємо $s=0$. Зведемо багатокритеріальну задачу $Z(F,G)$ на графі $G(B)$ конфігурації розміщень до однокритеріальної за допомогою лінійною згортки: задаємо вагові невід'ємні коефіцієнти λ_j, $j \in N_l$, які визначають ступінь важливості кожного критерію, і максимізуємо лінійну комбінацію цільових функцій, тобто розв'язуємо задачу

$$Z\left(f, G^s \right),$$

де $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\left\langle c_i,x\right\rangle,\ \lambda_i\ge 0,\ i\in N_l,\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i=1,\ G^s=R^n$.

У випадку, якщо який-небудь із коефіцієнтів $\lambda_i=1$, а всі інші $\lambda_j=0,\ i\ne j,\ i,j\in N_l$, то розглядається однокритеріальна задача з i-ю цільовою функцією.

Задаємо елементи множини $B=\left(b_1, b_2,\ldots,b_q\right)$, які впорядковані $b_1\le b_2\le\ldots\le b_q$ задаємо коефіцієнти цільової функції $c_1,c_2,\ldots,c_n$.

Основна частина

Крок 1. Упорядкуємо коефіцієнти $\lambda_i\cdot c_i$, $i\in N_l$, $\lambda_1c_1\le\lambda_2c_2\le\ldots\le\lambda_nc_n$, $i\in N_n$ цільової функції $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\left\langle c_i,x\right\rangle$.

Крок 2. Визначаємо мінімальні й максимальні значення цільової функції $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\left\langle c_i,x\right\rangle$, обчислюємо значення $f\left(x^*_{min}\right)$, $f\left(x^*_{max}\right)$ на загальному графі многогранника $G\left(B\right)$ й на кожному з підграфів $G_1\left(B\right),\ldots,G_n\left(B\right)$.

Крок 3. $k=0$. Вибираємо одне з додаткових обмежень $h_i=\sum_{i=1}^{m}g_{ij}x_i$, $i\in N_m, j\in N_n$ присвоюємо $k=k+1$, якщо $k=m$, тобто всі обмеження обрані, то на крок 10. Інакше, задаємо коефіцієнти додаткового обмеження k: g_{ij}, $i\in N_m$, $j\in N_k$,

$k = k+1,\ \ i := k - i$. Будуємо решітки для перетворення індексів коефіцієнтів (упорядковуємо коефіцієнти):

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \Rightarrow U'_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Перетворюємо додаткове обмеження в обмеження вигляду: $\tilde{g}_{ij}(x) = U_i g_{ij}(x) \geq h_i$, у якому коефіцієнти впорядковані по зростанню.

Крок 5. Визначаємо $\tilde{g}_k\left(x^*_{max}\right) = max,\ \tilde{g}_k\left(x^*_{min}\right) = min$ на графі $G(B)$.

Крок 6. Знаходимо значення функції додаткового обмеження $\tilde{g}_{ij}(x)$ в лівих крайніх точках $p_{i_{left}}$, які визначають max значень функції $\tilde{g}_k(x)$ на кожному підграфі $G_1(B),\ldots,G_n(B)$ графа, представивши граф в вигляді структурної схеми.

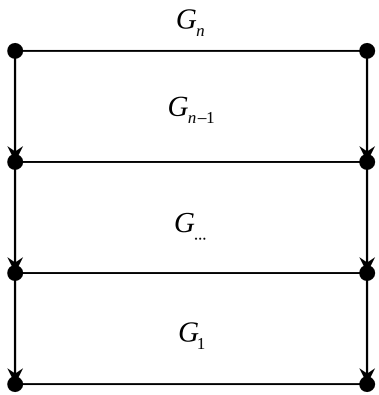

Рис. 7.3. Структурна схема графа $G(P_n)$

Крок 7. Порівнюємо виконання обмежень $\tilde{g}_q(x) \geq b_q$, якщо умова виконується, запам’ятовуємо $p_{i_{left}}$ і переходимо на наступний крок 8. Інакше на крок 9.

Крок 8. Знаходимо значення функції – додаткового обмеження в точках $p_{i_{rite}}$ (точки, які визначають min значення $\tilde{g}_k(x)$ на кожному підграфі). Ділимо відрізок, що визначається точками $p_{i_{rite}} \le g_q(x) \le p_{i_{left}}$ на кроці 6, 7 навпіл і одержуємо точку $\overline{x}^* = \frac{\left(p_{i_{left}} - p_{i_{rite}}\right)}{2}$. Переходимо на наступний крок.

Крок 9. Перевіряємо виконання перетвореного додаткового обмеження $g_k(x) \ge b_k$, підставивши значення точки $\overline{x}^*$ із множини розміщень $A(B)$. Якщо нерівність виконується, то запам'ятовуємо потрібний відрізок $\left[\overline{x}^*, p^*_{min}\right]$ або $\left[p^*_{max}, \overline{x}^*\right]$. Перевіряємо виконання умови $k = m,$, якщо не виконується, то переходимо на крок 3. Інакше на наступний крок.

Крок 10. Для всіх додаткових обмежень шукаємо підграф, що визначається множиною вершин і обчислюємо на ньому min або max значень цільової функції $f(x)$. Задача розв'язана, якщо значення цільової функції знаходяться в точках на перетині і визначають об'єднання вершин підграфів $G_1(B),\ldots,G_n(B)$. Інакше – задача нерозв'язна.

Таким чином, результатом роботи алгоритму є підграф $x^0 = (X, U, \Phi)$ вихідного графа $G(B) = (X, U, \Phi)$, з якого вибираються Парето-оптимальні розв'язки, такі як x^0, що задовольняють означенню Парето-оптимального розв'язку задачі $Z(F, X)$. Оскільки розв'язки задачі шукається на скінченній дискретній множині розміщень, то можна гарантувати знаходження хоча б одного Парето-оптимального розв'язку $\tilde{x}$ задачі $Z(F, X)$ з вектор-цільовою функцією, а відповідно, застосування алгоритму до даного графа $G(B)$.

7.4. Розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації на полікомбінаторних множинах

Систематичне вивчення властивостей комбінаторних множин та їх дослідження описані в багатьох роботах. Поряд з добре відомими комбінаторними конфігураціями перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів виділяються більш складні структури – полікомбінаторні структури [98, 240]. Підвищений інтерес до полікомбінаторних конфігурацій обумовлений дослідженнями останніх років в області комп'ютерних технологій при створенні сучасних алгоритмів і програм для розв'язування оптимізаційних задач. Слід зазначити, що задачі комбінаторної оптимізації на полікомбінаторних множинах невід'ємно пов'язані з комбінаторними многогранниками, що є опуклими оболонками таких множин, і їх властивостями та описані в [99, 245].

В даному розділі продовжується дослідження багатокритеріальних задач на полікомбінаторних множинах перестановок, розміщень, відображені в роботах [99, 245]. На підставі встановленого взаємозв'язку між багатокритеріальними задачами на комбінаторних множинах і оптимізаційними задачами на неперервній допустимій множині, встановлено деякі структурні властивості допустимої області, множин різних видів ефективних розв'язків, а також сформульовано і доведено ряд теорем про умови оптимальності ефективних розв'язків розглянутих задач [206]. Для векторних задач комбінаторного типу на полірозміщеннях запропонований один з можливих підходів до їх розв'язання.

Розглянемо основні поняття та означення, необхідні для постановки задачі та викладу основних результатів даної задачі [99, 245]. Зазначимо, що поняття вибірки, мультимножини означено в попередніх розділах.

Представимо множину N_q у вигляді впорядкованого розбиття на s, де $s<q$, непустих попарно непересічних підмножин $N_1,\ldots,N_s$, тобто для них виконуються умови: $N_i \cap N_j = \varnothing$, $N_i \neq \varnothing$, $N_j \neq \varnothing$, $\forall i,j \in N_s$, а так само впорядковане розбиття числа k на s доданки $k_1,k_2,\ldots,k_s$, що задовольняє умова $1 \le k_i \le q_i$, $\forall i \in N_s, |N_i| = q_i$. Очевидно, що $q_1+q_2+\ldots+q_s=q$, $k_1+k_2+\ldots+k_s=k$.

Позначимо H – множину елементів вигляду:

$$h=\left(h(1),\ldots,h(k)\right)=\left(h^1,\ldots,h^s\right),$$

де $h(j)\in N_n$, $j\in N_k$, а h^i – довільна перестановка елементів множини $J_i\ \forall i\in N_s$.

Нехай підмультимножина A^i мультимножини *A*, складається з тих елементів *A*, номера яких належать множині N_i: $A^i=\left\{a_1^i,\ldots,a_{k_i}^i\right\}$, $|N_i|=k_i$.

Як відомо [99, 245], множину

$$A_{qk}^{ns}(A,H)=\left\{\left(a_{h(1)},\ldots,a_{h(k)}\right)\middle|a_{h(i)}\in A\ \forall i\in N_n,\forall h\in H\right\}\subset R^k$$

називають загальною множиною полірозміщень, зазначених $A_{qk}^{ns}(A,H)=A_{qk}^{ns}$.

Опуклою оболонкою множини $A_{qk}^{ns}(A,H)$ полірозміщень є многогранник $M_{qk}^{ns}(A,H)$ полірозміщень, $M_{qk}^{ns}(A,H)=$ $=conv\,A_{qk}^{ns}(A,H)$, множина вершин якого є підмножиною множини полірозміщень: $vert\,M_{qk}^{ns}(A,H)\subset A_{qk}^{ns}(A,H)$.

Множина $M_{qk}^{ns}(A,H)$ визначається сукупністю всіх розв'язків системи:

$$\left\{\sum_{j=1}^{n_i}x_j\le\sum_{j=1}^{n_i}a_j^i,i\in N_s,\quad\sum_{j=1}^{m_i}x_{\alpha_j}\ge\sum_{j=1}^{m_i}a_j^i,\right.$$

$m_i\in N_{q_i-1},\alpha_j\in N_i,\forall i\in N_s$, $\alpha_j\ne\alpha_t,\forall j\ne t,\forall j,t\in N_i$, при умові впорядкування елементів мультимножини *A* за неспаданням: $a_1\le\ldots\le a_k$. Очевидно, що це впорядкування зберігається й для кожної підмультимножини A^i $i\in N_s$, з *A*.

Зрозуміло, що кожний з многогранників $M_{q_ik_i}^{n_i}\left(A^i\right)$ являє собою многогранник розміщень, а отже визначає об'єкти конфігурації розміщень.

Оскільки для конфігурації розміщень відомий орієнтований граф по значеннях лінійної функції, то його представлення можна використати і для полірозміщень, згідно означення добутку многраників і відповідної рівності

$$\underset{i=1}{\overset{s}{\otimes}} M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)=\left\{x\in R^{d_1+\ldots+d_s} \mid x=\left(x_1,\ldots,x_s\right),\ x_i\in M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)\ \forall i\in N_s\right\},$$

де точка $x\in \underset{i=1}{\overset{s}{\otimes}} M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$ задовольняє кожній з s підсистем системи

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \geq \sum\limits^{\left|\omega^i\right|} a_j^{N_i} \\ \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \leq \sum\limits^{\left|\omega^i\right|} a_{\eta_i-j+1}^{N_i} \end{cases} \forall\omega^i\subset N_i',\forall i\in N_s. \qquad (7.5)$$

Отже, можна стверджувати, що якщо a_{h^i} – вершина многогранника $M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$, то $a(h)=\underset{i=1}{\overset{s}{\otimes}} a_{h^i}$. Відповідно

$$a(h)=\left(a_{h^1},\ldots,a_{h^s}\right),$$

де $a(h)\in P_{qk}^{ns}\left(A,H\right)$.

Розглянемо структуру безумовної багатокритеріальної задачі на полірозміщеннях. Через N_m, N_s позначаємо множини m та s перших натуральних чисел відповідно, $N_m=\{1,\ldots,m\}$, $N_s=\{1,\ldots,s\}$.

Критерії, що оптимізуються, можна представити набором функцій:

$$f_1(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^1 x_j \to min;$$

$$f_2(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^2 x_j \to min;$$

$$\ldots$$

$$f_s(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^s x_j \to min;$$

$$f_{s+1}(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^{s+1} x_j \to max;$$

$$\ldots$$

$$f_m(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^{m} x_j \to max. \qquad (7.6)$$

Тобто з m функцій s мінімізуються, а $m-s$ навпаки максимізуються. Але у практичному застосування часто виникає потреба у зменшенні одних критеріїв та збільшенні інших. Частинним випадком цієї ситуації буде випадок, коли всі функції максимізуються або мінімізуються.

Набір функцій (7.6) як відомо можна представити у вигляді вектор-функції:

$$\vec{F}(-f_1,\ldots,-f_s, f_{s+1},\ldots,f_m) \qquad (7.7)$$

максимум якої нам необхідно знайти.

Умова належності розв’язків множині полірозміщень може виникати з додаткових умов, що накладаються на змінні в самій постановці задачі. У побудованій математичній моделі на розв’язок накладається умова належності множині полірозміщень у вигляді:

$$x=(x_1,\ldots,x_k)\in A_{qk}^{ns}(A,H). \qquad (7.8)$$

З урахуванням усіх вище означених умов, задачу можна сформулювати наступним чином: знайти множину значень (7.8), що є оптимальними для функції (7.7).

Таку задачу назвемо комбінаторною багатокритеріальною безумовною задачею на множині полірозміщень. Якщо на множину допустимих розв’язків накладаються додаткові умови вигляду:

$$a_{ij}x_j \le b_j,$$

де $i\in N_m, j\in N_k$, (7.9)

то задача вигляду (7.7)–(7.9) є комбінаторною багатокритеріальною з додатковими обмеженнями.

Підхід до розв’язування комбінаторних багатокритеріальних задач на полірозміщеннях

При розв’язуванні багатокритеріальних комбінаторних задач постає питання визначення ефективного розв’язку, що пов’язане з порівнянням альтернатив на множині цільових функцій. Слід зазначити, що такий розв’язок може виявитись не оптимальним для жодної з цільових функцій, проте, він є найкращим компромісним розв’язком з урахуванням усіх цільових функцій (критеріїв) одночасно.

Визначення 7.5 [171, 172]. Альтернатива x_0 має назву ефективної, якщо на множині допустимих альтернатив *X*, що визначається умовами (7.8), (7.9), не існує такої альтернативи $\overline{x}$, для якої виконувались би нерівності:

$$f_i\left(\overline{x}\right) \geq f_i\left(x_0\right), \forall i \in I_1$$
$$f_i\left(\overline{x}\right) \leq f_i\left(x_0\right), \forall i \in I_2 \qquad (7.10)$$

і хоча б одна з них була строгою.

Це означає, що жодна з допустимих альтернатив не може покращити значення деякої цільової функції, не погіршуючи при цьому хоча б одну з цільових функцій, що залишились. Ефективну альтернативу називають також оптимальною по Парето. Усі такі альтернативи складають множину Парето-оптимальних розв’язків $P_F\left(X\right)$ комбінаторної задачі на полірозміщеннях. Крім Парето-оптимальних (ефективних) розв’язків визначають також і інші множини розв’язків задач комбінаторної багатокритеріальної оптимізації на полірозміщеннях, такі як $Sl_F\left(X\right)$ – множина оптимальних по Слейтеру (слабко ефективних) розв’язків, $Sm_F\left(X\right)$ – множина оптимальних по Смейлу (строго ефективних) розв’язків. Такі множини для багатокрітеріальних задач на перестановках були розглянуті в попередньому пункті.

Вивчення властивостей даних множин є необхідним для дослідження досить важливого та актуального питання стійкості оптимізаційних багатокритеріальних задач на полікомбінаторних множинах та стійкості їх розв'язків. Це пов'язано з тим, що вихідні дані задач, які є математичними моделями різноманітних процесів, в більшості випадків не можуть бути визначені однозначно. Вони задаються з деякою похибкою і залежать від багатьох параметрів, а тому потребують уточнення в процесі розв'язування задачі. Для багатьох задач такі зміни значень критеріїв приводять до суттєвих змін результату, а це в свою чергу до неточності істинного розв'язку. Тому необхідним кроком є дослідження питання стійкості розв'язків задач, виділення класів стійкості та розробка методів, які б дозволяли змінити чисельний розв'язок некоректних задач із непередбаченим впливом збурень у вихідних даних задачі, що докладно пояснюється в роботах [217, 219].

Комбінований метод для розв'язування комбінаторної багатокритеріальної задачі оптимізації на полірозміщеннях

Розглядається метод, що є поєднанням двох методів: методу обмежень [60, 105] та методу комбінаторного відсікання [97, 243].

Як зазначалося, комбінаторні багатокритеріальні задачі є досить актуальними при розв'язанні ряду прикладних задач, але розроблені існуючі методи не повністю адекватно можуть знаходити розв'язок таких задач. Є доцільним розробити новий підхід до їх розв'язання.

Розглянемо метод обмежень [105, 117], адаптований до вищезазначених позначень.

Нехай задана деяка множина цільових функцій $f_i(x)$, де

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j, i \in N_m$$

причому s перших функцій треба мінімізувати, а наступні $m-s$ – максимізувати, що записано у вигляді вектор-функції (7.7) На результуючий вектор $X = \{x_j\}, j \in N_k$ накладені обмеження виду (7.9) а також умова належності розв'язку множині полірозміщень (7.8).

Алгоритм розв'язування задачі

1. Умова належності розв'язку множині полірозміщень записується у вигляді системи нерівностей, що описують відповідну комбінаторну множину. Покладаємо значення цілочислової змінної $k = 0$.

2. Об'єднується система (7.5) пункту 1 з системою лінійних обмежень (7.9) задачі.

3. Визначаються для кожної з функцій такі розв'язки, що задовольняють обмеження (7.8) і (7.9), а також мінімізують та максимізують функції, підставивши відповідні значення у кожну з функцій.

4. Застосовуються наступні відображення:

а) для функцій, що мінімізуються:

$$W_i\left(f_i\left(X\right)\right) = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0}{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{i\,max} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0}, \ \forall i \in N_s; \tag{7.11}$$

б) для функцій, що максимізуються:

$$W_i\left(f_i\left(X\right)\right) = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{i\,min}}, \ \forall i \in N_{m-s}, \tag{7.12}$$

де x_j^0 – розв'язок, що задовольняє умовам (7.11), (7.12), та оптимізує i-ту цільову функцію, а $x_{max}\left(x_{min}\right)$ – розв'язки, що максимізують (мінімізують) відповідний критерій на допустимій множині розв'язків.

5. Записується наступна задача лінійного програмування:

$$k_0 = x_{n+1} \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j \le \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0 + \frac{k_0}{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{i\,max} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0 \right), \forall i \in N_s \\ \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j \ge \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0 - \frac{k_0}{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{i\,min} \right), \forall i \in N_{m-s} \\ a_{ij} x_j \le b_j, i \in N_n \\ \sum_{j \in \omega^i} x_j \ge \sum^{|\omega^i|} a_j^{N_i} \\ \sum_{j \in \omega^i} x_j \le \sum^{|\omega^i|} a_{q_i - j+1}^{N_i} \end{cases} \tag{7.13}$$

Розв’язуємо її двоїстим симплекс-методом.

Зауваження до пункту 5. Компромісним розв’язком даної багатокритеріальної задачі буде такий ефективний розв’язок *x*, для якого відносні відхилення однакові та мінімальні, тобто:

$$\rho_1 W_1(X) = \rho_2 W_2(X) = \ldots = \rho_m W_m(X) = k_{0\,min}. \tag{7.14}$$

6. Задача пункту 5 перетворюється до вигляду:
мінімізувати $k_0 = x_{n+1}$ при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} d_{1j} x_j + d_{1n+1} x_{n+1} + d_1 \ge 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j + d_{in+1} x_{n+1} + d_i \ge 0;$$

$$\ldots$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{mj} x_j + d_{mn+1} x_{n+1} + d_m \ge 0;$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_1 \le 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k \le 0\end{array}\right\},\ \ x_j \ge 0, j \in N_n,$$

де коефіцієнти визначаються наступним чином:

$$d_{ij} = \begin{cases} -\rho_i c_{ij}, \forall j \in N_n; i \in N_s \\ \rho_i c_{ij}, \forall j \in N_n; i \in N_{m-s} \end{cases}$$

$$d_{i,n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(x_{ij}^{(0)} - x_{ij\,min}\right), i \in N_s \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(x_{ij\,max} - x_{ij}^{(o)}\right), i \in N_{m-s} \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} \rho_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{(0)}, i \in N_s \\ -\rho_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{(o)}, i \in N_{m-s}. \end{cases}$$

Покладаємо $\rho_i = \dfrac{1}{m}, \forall i \in N_m$.

7. Перевіряємо належність вектора-розв'язку $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ полікомбінаторній множині (7.8). Якщо $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in A_{qk}^{ns}\left(A, H\right)$, то розв'язок знайдено і алгоритм завершує свою роботу, інакше переходимо до пункту 8.

8. Перевіряємо $k > 1$. Якщо «так», то робимо перехід на крок 10. Інакше – перехід на крок 9.

9. Збільшуємо k на одиницю: $k = k + 1$. Додаємо до системи обмежень сформовану нерівність-відсікання:

$$\frac{x_{i_1}}{\Theta_{i_1}}+\frac{x_{i_2}}{\Theta_{i_2}}+...+\frac{x_{i_\gamma}}{\Theta_{i_\gamma}}\geq 1 \qquad (7.15)$$

у вигляді рівності

$$-\frac{x_{i_1}}{\Theta_{i_1}}-\frac{x_{i_2}}{\Theta_{i_2}}-...-\frac{x_{i_\gamma}}{\Theta_{i_\gamma}}+x_{n+q}=-1, \qquad (7.16)$$

ввівши допоміжну змінну $x_{n+q}\geq 0$. У формулах (7.15), (7.16) $i_1,\dots,i_\gamma$ – номери небазисних змінних в останній точці x^*, γ – їх кількість, а $\Theta_{ij}\forall j\in N_\gamma$ знаходиться так:

$$\Theta_i=\min_{j:a_{ij}>0}\frac{b_i}{a_{ij}}=\frac{b_t}{a_{tj}}. \qquad (7.17).$$

Переходимо на крок 5.

10. Перевіряємо: $\Theta_{n+q-1}=0$ (Θ_{n+q-1} обчислюється за формулою (7.17). Якщо «ні», переходимо на крок 9. Якщо «так», то в останній приєднаній до системи рівності (7.16) замінити введену там допоміжну змінну на 0. Переходимо на крок 5 алгоритму.

Приклад розв’язання задачі. Нехай задана мультимножина $A=\{1,2,3,3,4\}$, що містить 5 елементів. Отже $N_5=\{1,2,3,4,5\}$. Нехай задано $s=2$, виберемо розбиття N_5 на множини $N_1=\{1,3,5\}; N_2=\{2,4\}$. Нехай задано $k=2$ та вибрані $k_1=1$, $k_2=1$. Тоді множина H утворюється у вигляді: $H=\{(1,2);(1,4);(3,2);(3,4);(5,2);(5,4)\}$. А отже, множина полірозміщень матиме такий вигляд:

$$A_{54}^{22}(A,H)=\{(1,2);(1,3);(3,2);(3,3);(4,2);(4,3)\}.$$

Математична постановка: знайти множину значень $x\in A_{54}^{22}(A,H)$, що є оптимальними для функцій

$$f_1(x) = 2x_1 + 3x_2;$$

$$f_2(x) = -x_1 - 2x_2.$$

Розв'язання. Запишемо многогранник полірозміщень (7.30) у вигляді системи обмежень:

$$\begin{cases} x_1 \ge 1 \\ -x_1 \ge -4 \\ x_2 \ge 2 \\ -x_2 \ge -3 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ -x_1 - x_2 \ge -7 \end{cases}.$$

Скориставшись формулами (7.11), (7.12), перетворимо функції. Для цього проаналізуємо кожну з функцій на найбільше та найменше значення:

x_1	x_2	F_1	F_2
1	2	8	–5
1	3	11	–7
3	2	12	–7
3	3	15	–9
4	2	14	–8
4	3	17	–10

Отже, отримаємо наступні функції:

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{17 - 2x_1 - 3x_2}{17 - 8} = \frac{17 - 2x_1 - 3x_2}{18} \le x_3$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{-x_1 - 2x_2 + 10}{-5 + 10} = \frac{-x_1 - 2x_2 + 10}{10} \le x_3.$$

Згідно методу обмежень, необхідно розв'язати таку задачу: мінімізувати x_3 при умовах:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 18x_3 \geq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 10 \\ x_1 \geq 1 \\ -x_1 \geq -4 \\ x_2 \geq 2 \\ -x_2 \geq -3 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ -x_1 - x_2 \geq -7 \end{cases}$$

При переході до двоїстої задачі отримаємо:

$$17y_1 + 10y_2 + y_3 - 4y_4 + 2y_5 - 3y_6 + 3y_7 - 7y_8 \to max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_7 - y_8 \leq 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8 \leq 0 \\ 18y_1 + 10y_2 \leq 1 \end{cases}$$

Розв'язуючи дану задачу симплекс-методом, отримали у результаті наступні значення $x_1 = 4,$ $x_2 = 3,$ $x_3 = 0,$ отже $x = (4,3) \in A_{54}^{22}(A,H)$ – шуканий розв'язок.

Висновки до розділу

Формулюється постановка задачі комбінаторної оптимізації, що об'єднує проблему багатокритеріальності та комбінаторні властивості розв'язків. Досліджено складні задачі на комбінаторної множині розміщень із багатьма критеріями. Розглянуто деякі властивості допустимої області комбінаторної задачі, що має специфічні вхідні дані. Побудовано й обґрунтований застосування методу направленого структурування до розв'язування екстремальних задач з лінійними функціями цілі на комбінаторній множині розміщень. Отримано розв'язок багатокритеріальної задачі комбінаторної оптимізації на полірозміщеннях з багатьма критеріями та додатковими лінійними обмежень за допомогою комбінованого методу.

Розглянута модель багатокритеріальної задачі з урахуванням комбінаторних властивостей області допустимих розв'язків, яка може бути успішно застосована при розв'язанні різних практичних задач. Встановлено взаємозв'язок між багатокритеріальною задачею на комбінаторних конфігураціях та багатокритеріальною задачею на графі перестановок, розміщень, запропонований загальний метод направленого структурування, що об'єднує засоби комбінаторного аналізу та теорії графів і передбачає послідовне виконання трьох стадій: генерування у певній послідовності всіх елементів заданої комбінаторної конфігурації; побудову на її елементах орієнтованого графа, де дуга відповідає спаданню значень цільової функції; побудову алгоритму розв'язку задачі на частково упорядкованих вершинах графа.

Завдяки частковій упорядкованості часто вдається трудомісткість алгоритмів за даним методом звести до полінома від логарифму всієї кількості комбінаторних конфігурацій.

У результаті проведених досліджень використані структурні властивостей комбінаторних конфігурацій та їх графів, які дають можливість розробляти ефективні алгоритми розв'язання нових класів багатокритеріальних задач на інших комбінаторних конфігураціях.

ПІСЛЯМОВА

Після прочитання цієї монографії у читача повинно виникнути багато запитань до авторів. В цьому останньому слові ми хочемо передбачити їх зміст і заздалегідь на них відповісти. Зрозуміло, що перший і другий розділи не викликають непорозумінь, бо вони носять вступний характер і являються допоміжними до основної теми. Але вже починаючи з третього розділу, матеріал книги викликає деяке відчуття незавершеності і спонукає до діалогу і детальнішого обговорення викладених результатів. В основному мова буде йти про деякі додаткові моменти та невикористані можливості для отримання нових, узагальнених результатів.

В третьому розділі мова йде про методи генерації комбінаторних конфігурацій, серед яких особливу увагу приділено перестановкам. Звичайно, так як кількість перестановок дорівнює $n!$, то будь-який порядок їх переліку можна назвати їх генерацією. Теоретично можливо $(n!)!$ генерацій перестановок з n елементів. В розділі наведено тільки найбільш відомі методи (лексикографічний, антилексикографічний, метод з мінімальною кількістю транспозицій, метод з транспозиціями сусідніх елементів) та додано власний метод переміщення максимального елемента. Граф перестановок побудовано лише для антилексикографічного методу як оптимального для лінійної цільової функції. Проте цікаво було б побудувати такий граф для методу з транспозиціями сусідніх елементів, в якому граф представляється у вигляді гамільтонового ланцюга, складеного з n шляхів, на яких функція почергово то спадає, то зростає. Ті ж побажання можна виказати відносно графів інших конфігурацій, які наведені далі. І взагалі, питання про співвідношення методу генерації комбінаторної конфігурації з відповідним графом цієї конфігурації та типом цільової функції має принциповий характер, тому потребує окремого, детальнішого розгляду. Тим більше, що це має пряме відношення до запропонованого методу розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях, який має назву методу направленого структурування, конспективний виклад якого наведено в кінці даного розділу.

В четвертому розділі розглядається задача оптимізації лінійної функції на перестановках. В процесі розв'язання цієї задачі доводиться розв'язувати декілька важливих підзадач допоміжного характеру. Одна з них така: як за номером перестановки в даному методі генерації встановити саму перестановку. Існує і обернена підзадача: як за виглядом перестановки знайти її порядковий номер у послідовності згенерованих за даним методом перестановок. Ці підзадачі розв'язані тільки для лексикографічного методу генерації, хоча цікаво розробити алгоритми їх розв'язання і для інших важливих методів. В зв'язку з цим напрошується питання: чи можливо побудувати алгоритм обчислення значення функції за номером перестановки, який вона має в даному способі генерації. Особливо треба виокремити підзадачу про локалізацію значення функції,суть якої полягає в знаходженні такої перестановки (або декількох), на якій функція приймає певне задане значення. В розділі пропонуються два методи розв'язання цієї проблеми для антилексикографічного методу генерації – горизонтальний та координатний. В дечому вони мають схожість, тому було б бажано провести порівняльний аналіз та визначити їх складність. Для невеликих значень кількості вершин графа конфігурацій розроблено прийоми знаходження гамільтонового шляху, на якому лінійна функція монотонно спадає. Було б доречно розробити це питання більш детально та для більших розмірів графів. Знову ж таки недостатньо, чисто конспективно висвітлені проблеми, які виникають для перестановок з повтореннями елементів. Але особливо відчувається повна відсутність розв'язання (або навіть постановки) тих же підзадач для інших типів комбінаторних конфігурацій.

В п'ятому розділі розглядається екстремальна задача на перестановках з дробово-лінійною цільовою функцією, тобто функцією, заданою як відношення двох лінійних функцій. Серед всіх таких функцій для початку вибрано найпростішу, де лінійні функції складають арифметичні прогресії. Доведено, що для таких функцій граф перестановок ізоморфний графу перестановок з лінійною цільовою функцією. Це означає, що граф перестановок представляє ієрархічну структуру зі спадаючою функцією відносно підграфів. У авторів є впевненість, що для довільної дробово-лінійної функції структура графів змінюється таким чином, що можна досить нескладно виявити підграфи, на яких досягаються локальні екстремуми цільової функції. Це потребує окремого дослідження, для якого не знайшлося місця в цьому розділі. І знову, як і в попередніх розділах, треба відзначити недостатню увагу, приділену іншим комбінаторним конфігураціям.

В шостому розділі розглядається загальна схема застосування методу направленого структурування до розв’язання стандартних екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях, тобто задач з обмеженнями. Цей розділ, на відміну від інших, написано достатньо повно, тобто в ньому метод демонструється не тільки на перестановках, а і на інших комбінаторних конфігураціях, крім того, не тільки для лінійної функції, а і для дробово-лінійної. Це дає змогу будувати подібні схеми для більш загальних випадків. Особливий науковий інтерес серед інших функцій викликають такі як квадратична та інші поліноміальні функції.

Останній, сьомий розділ, присвячений розв’язуванню оптимізаційних багатокритеріальних задач, – можна вважати, не має самостійного значення, бо він є синтезом сучасної теорії багатокритеріальної оптимізації та методів дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях, викладених в попередніх розділах. Виявилося, що для цих задач, як і для однокритеріальних, можна з успіхом застосовувати ті ж методи побудови графів комбінаторних конфігурацій, локалізації значень функцій на графах, пошуку екстремума на частково упорядкованих множинах тощо.

Підводячи підсумки, можна сказати, що дана книга є, перш за все, попередньою заявкою на дослідження досить об’ємної галузі дискретної математики з багатообіцяючим майбутнім, і цим самим вона повинна привернути увагу не тільки досвідчених вчених, але і молодих початківців.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айгнер М. Комбинаторная теория / М. Айгнер. − М. : Мир, 1982. – 558 с.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с.
3. Алексеев В. Б. Использование симметрии при нахождении ширины частично упорядоченного множества / В. Б. Алексеев // Дискретный анализ. – 1974. − Вып. 26. − С. 20–35.
4. Альбертьян М. К. О комбинаторных характеристиках несравнимости в задачах принятия решений / М. К. Альбертьян // Известия АН СССР. – 1974. − № 6. − С. 3–12. – (Серия «Техническая Кибернетика»).
5. Альседоров З. М. Представление и восстановление графов / З. М. Альседоров, Г. А. Донец. – К. : Наук. думка, 1991. – 188 с.
6. Андрейчиков А. В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике / А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 364 с.
7. Асакер Р. Конечные графы и сети / Р. Асакер, Т. Саати. − М. : Наука, 1974. – 368 с.
8. Бабич М. Д. Вычислительный эксперимент в проблеме оптимизации вычислений / М. Д. Бабич, В. К. Задирака, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 1 – С. 51–63.
9. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М. : Мир, 1982. – 584 с.
10. Бакурова Г. В. Об устойчивости многокритериальных задач на системах подмножеств / Г. В. Бакурова, В. А. Емеличев, В. А. Перепелица // Доклады АН Беларуси. – 1993. – № 11 – С. 80–84.
11. Баранов В. И. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения / В. И. Баранов, Б. С. Стечкин. – М. : Наука, 1989. – 160 с.
12. Басакер Р. Конечные графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати. − М. : Наука, 1974. – 368 с.
13. Белкин А. Р. Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации / А. Р. Белкин, М. Ш. Левин. – М. : Наука, 1990. – 232 с.

14. Белов Ю. А. Об одном классе специальных перестановочных многогранников / Ю. А. Белов // Моделирование и анализ информационных систем. – 1996. – № 3 – С. 78–84.
15. Березовский Б. А. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации / Б. А. Березовский, В. И. Борденко, В. И. Кемпнер. – М. : Наука, 1981. – 149 с.
16. Берж К. Теория графов и ее применение / К. Берж. − М. : Изд-во иностр. лит., 1962. − 320с.
17. Білоус Н. В. Основи комбінаторного аналізу / Н. В. Білоус, З. В. Дудар, Н. С. Лесна, І. Ю. Шутін. – Х. : ХДТУРЕ, 1999. – 97 с.
18. Бондаренко В. А. Об одном классе многогранников и их использовании в комбинаторной оптимизации / В. А. Бондаренко // Доклады АН России. – 1993. – Т. 328. – № 3. – С. 303–304.
19. Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников / А. Бренстед. – М. : Мир, 1988. – 240 с.
20. Бурдюк В. Я. Разрешимые случаи новой комбинаторной задачи оптимизации / В. Я. Бурдюк, В. А. Семенов // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 2. – С. 175–178.
21. Бурштейн Ф. В. Многокритериальные задачи принятия решений при неопределенности и риске / Ф. В. Бурштейн, Э. С. Королев // Теоретическая кибернетика. – Тбилиси, 1980. – С. 156–162.
22. Вейль Г. Элементарная теория выпуклых многогранников : матричные игры / Г. Вейль. – М. : Физматгиз, 1961. – С. 254–273.
23. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1988. – 288 с.
24. Веселов С. И. Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы и их применение / С. И. Веселов, А. Ю. Чирков. Горький, 1990. С. 107–110.
25. Вилкас Э. Й. Существование эффективно-равновесных точек в задаче векторной оптимизации / Э. И. Вилкас // Литовский мат. сб. – 1968. – Т. 8. – № 1. – С. 41–44.
26. Виноградская Т. М. Среднее значение числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах // Известия АН СССР. – 1976. − № 2. − С. 36–38. – (Серия «Техническая кибернетика»).

27. Виноградская Т. М. Точная верхняя оценка числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах / Т. М Виноградская, М. Г. Гафт // Автоматика и телемеханика. – 1974. − № 9.− С. 111–118.
28. Волкович В. Л. Об одной общей схеме последовательного анализа и отсеивания вариантов / В. Л. Волкович, А. Ф. Волошин // Кибернетика. – 1978. – № 5. – С. 98–105.
29. Волконский В. А. О множестве эффективных точек в линейных многокритериальных задачах / В. А. Волконский, Г. К. Еганян, А. Б. Поманский // Сибирский математический журнал. − 1983. – Т. 24. – № 2. – С. 9–17.
30. Волошин О. Ф. Теорія прийняття рішень : навч. посіб. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 304 с.
31. Воронин А. Н. Векторная оптимизация динамических систем / А. Н. Воронин. – К. : Техніка, 1999. – 284 с.
32. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / под ред. В. С. Михалевича. – К. : Наукова думка, 1977. – 178 с.
33. Гамидов Р. Г. О принятии решения в задачах многокритериальной оптимизации / Р. Г. Гамидов, М. Ш. Фарбер // Известия АН Азербайджанской РСР. – 1978. – № 3. – С. 11–16. – (Серия физико-технических и математических наук).
34. Гаращенко И. В. Приближенный алгоритм решения симметричной задачи коммивояжера / И. В. Гаращенко, А. В. Панишев, Д. Д. Плечистый // Искусственный интеллект. – 2006. − № 3. – С. 317–378.
35. Гасс С. Линейное программирование / С. Гасс. – М. : Физ.-мат. литература, 1961. – 304 с.
36. Гафт М. Г. Принятие решений при многих критериях / М. Г. Гафт. – М. : Знание, 1979. – 178 с.
37. Герасин С. Н. Покрытие множеств и отношение толерантности / С. Н. Герасин, С. В. Яковлев // Кибернетика и системный анализ. − 2008. – № 3. – С. 29–38.
38. Гирлих Э. Условия разрешимости векторных задач с помощью линейной свертки критериев / Э. Гирлих, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 1. – С. 81–95.

39. Глушков В. М. О системной оптимизации / В. М. Глушков // Кибернетика. – 1980. – № 5. – С. 89–90.
40. Глушков В. М. Основы безбумажной информатики / В. М. Глушков. – М.: Наука, 1982. – 552 с.
41. Гнусов Ю. В. Методологические аспекты прогнозирования функционирования социально-экономических систем / Ю. В. Гнусов, В. В. Тулупов, С. В. Яковлев // Збірник наукових праць Харківського військового університету. – Х., 2006. – С. 225–233.
42. Гольдштейн А. Л. Исследование операций: многокритериальные задачи / А. Л. Гольдштейн. – М. : Наука, 1995.− 235 с.
43. Гоппа В. Д. Введение в алгебраическую теорию информации / В. Д. Гоппа. − М. : Наука. Физматлит, 1995. − 112 с.
44. Горбатов В. А. Фундаментальные основы дискретной математики / В. А. Горбатов // Информационная математика. – М. : Наука. Физматлит, 2000. − 544 с.
45. Гордон В. С. К вопросу минимизации функций на множестве перестановок частично упорядоченных элементов / В. С. Гордон, Я. М. Шафранский // Известия АН БССР. – 1979. – № 2. – С. 122–124. – (Серия физико-математических наук).
46. Гуляницкий Л. Ф. Метаэвристический метод деформируемого многогранника в комбинаторной оптимизации / Л. Ф. Гуляницкий, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 2007. − № 6. – С. 70–79.
47. Гуляницкий Л. Ф. Разработка гибридных методов дискретной оптимизации на основе G-алгоритмов / Л. Ф. Гуляницкий // Компьютерная математика. – 2005. − № 1. – С. 143–151.
48. Гуляницкий Л. Ф. Разработка гибридных методов дискретной оптимизации на основе G-алгоритмов / Л. Ф. Гуляницкий, Н. К. Тимофеева // Управляющие системы и машины. – 1982. − № 3. – С. 50–53.
49. Гуляницкий Л. Метаэвристический метод деформаций для решения задач комбинаторной оптимизации / Л. Гуляницкий // Knowledge. Dialogue. Solution (KDS – 2007) : XIII International Conference, (Varna, June 2007). – Sofia : ITHEA, 2007. – Vol. 1. − P. 95–102.

50. Гуляницкий Л. Ф. Об одном метаэвристическом методе комбинаторной оптимизации / Л. Ф. Гуляницкий // Компьютерная математика. – 2006. – № 2. – С. 1–6.
51. Гуляницкий Л. Ф. Метаэврический метод деформируемого многранника в комбинаторной оптимизации / Л. Ф. Гуляницкий, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 6. – С. 70–79.
52. Гуляницький Л. Ф. До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації / Л. Ф. Гуляницький // Теорія оптимальних рішень. – 2008. − № 7. – С. 45–49.
53. Гупал А. М. Оптимальные процедуры распознавания / А. М. Гупал, И. В. Сергиенко. – К. : Наукова думка, 2008. – 232 с.
54. Гупал А. М. Комплементарность оснований в хромосомах ДНК/ А. М. Гупал, А. А. Вагис // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 5. – С. 90–94.
55. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / пер. с англ. / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 416 с.
56. Донец Г. А. Алгоритм поиска значений линейной функции на лексикографически упорядоченных перестановках / Г. А. Донец, Л. Н. Колечкина // Теорія оптимальних рішень. – 2009 – № 8. – С. 3−8.
57. Донец Г. А. Локализация значения линейной функции заданной на перестановках / Г. А. Донец, Л. Н. Колечкина // Радиоэлектроника и информатика. – 2009. − № 1. – С. 76–81.
58. Донец Г. А. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок / Г. А. Донец, Л. Н. Колечкина // Кибернетика и системный анализ – 2009. −№ 2. – С. 50−61.
59. Донец Г. А. Об одной задачи оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках / Г. А. Донец, Л. Н. Колечкина // Проблемы управления и информатики. – 2010. − № 2. – С. 12−16.
60. Донец Г. А. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах / Г. А. Донец, Л. Н. Колечкина // Управляющие системы и машины. – 2009. − № 4. – С. 36−42.

61. Донец Г. А. Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников / Г. А. Донец, Л. Н. Колечкина // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 1. – С. 10–16.
62. Донец Г. А. Экстремальные покрытия графов / Г. А. Донец, А. Я. Петренюк. – Кировоград : ОАО «Кіровоградське видавництво», 2009. – 170 с.
63. Донець Г. А. Метод моделювання структури вхідних даних і підкласи розв'язних задач / Г. А. Донець, Н. К. Тимофієва // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS – 2007). П'ята міжнар. наук-практ. конф. Дніпропетровськ, 14–16 листопада 2007 р. – Дніпропетровськ, 2007. – С. 52–53.
64. Дубов Ю. А. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем / Ю. А. Дубов, С. И. Травкин, В. Н. Якимец. – М. : Наука, 1986. – 296 с.
65. Емеличев В. А. Алгоритм линейной свертки в последовательной оптимизации критериев / В. А. Емеличев, О. А. Янушкевич. − Минск, 1996. − 28 с. Препринт / АН Беларуси. Ин-т техн. кибернетики; № 5).
66. Емеличев В. А. Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи дискретной оптимизации / В.А. Емеличев, М. К. Кравцов, О. А. Янушкевич // Мат. заметки. − 1995. − Т. 58. − вып. 3. − С. 365–371.
67. Емеличев В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. − М. : Наука, 1990. – 384 с. (Изд. 2, испр. – М. : УРСС, 2009. – 392 с.).
68. Емеличев В. А. Линейная свертка критериев в задачах лексикографической оптимизации / В. А. Емеличев, О. А. Янушкевич // Докл. АН Беларуси. − 1999. − Т. 43. − № 2. − С. 29–32.
69. Емеличев В. А. Многокритериальные задачи об остовах графа / В. А. Емеличев, В. А. Перепелица // Докл. АН СССР. − 1988. − Т. 298. − № 3. − С. 544–547.
70. Емеличев В. А. О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью алгоритмов линейной свертки критериев / В. А. Емеличев, М. К. Кравцов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. − 1994. − Т. 34. − № 7. − С. 1082–1094.

71. Емеличев В. А. О задачах лексикографической оптимизации / В. А. Емеличев, О. А. Янушкевич // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. − 1998. − Т. 5. − № 4. − С. 30–37.
72. Емеличев В. А. О многокритериальных задачах нахождения лексикографических оптимумов / В. А. Емеличев, А. А. Гладкий, О. А. Янушкевич // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. − 1996. − № 3. − С. 82–86.
73. Емеличев В. А. О разрешимости одного класса дискретных векторных задач с помощью алгоритма линейной свертки критериев / В. А. Емеличев, М. К. Кравцов, О. А. Янушкевич // Журн. вычисл. математики и мат. физики. − 1997. − Т. 37. − № 11. − С. 1404–1408.
74. Емеличев В. А. Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2007. − № 5. – С. 45–51.
75. Емеличев В. А. Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Дискретная математика. – 2007. – Вып. 3. − С. 79–83.
76. Емеличев В. А. Разрешимость векторной траекторной задачи на «узкие места» с помощью алгоритма линейной свертки критериев / В. А. Емеличев, М. К. Кравцов, О. А. Янушкевич // Докл. АН Беларуси. − 1996. − Т. 40. − № 4. − С. 29–33.
77. Емеличев В. А. Сложность дискретных многокритериальных задач / В. А. Емеличев, В. А. Перепелица // Дискрет. математика. – 1994. – Вып. 1. – С. 3–33.
78. Емеличев В. А. Условия Парето-оптимальности в дискретных векторных задачах оптимизации / В. А. Емеличев, О. А. Янушкевич // Дискретная математика. − 1997. − Т. 9. – Вып. 3. − С. 153–160.
79. Емеличев В. А. О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев / В.А. Емеличев, М.К. Кравцов // Докл. РАН. − 1994. − Т. 334. − № 1. − С. 9–11.

80. Емеличев В. А. О некоторых алгоритмических проблемах многокритериальной оптимизации на графах / В. А. Емеличев, В. А. Перепелица // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29. – № 2. – С. 171–183.
81. Емеличев В. А. О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Кибернетика и системный анализ. – 2010. − № 1. – С. 82–90.
82. Емеличев В. А. К вычислительной сложности дискретных многокритериальных задач / В. А. Емеличев, В. А. Перепелица // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. − 1988. − № 1. − С. 78–85.
83. Емеличев В. А. Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи / В. А. Емеличев, Э. Гирлих, О. А. Янушкевич // Дискрет. анализ и исслед. операций Сер. 1. − 1997. − Т. 4. − № 2. − С. 3–14.
84. Емеличев В. А. О некоторых алгоритмических проблемах многокритериальной оптимизации на графах / В. А. Емеличев, В. А. Перепелица // Журн. вычисл. математики и мат. физики. − 1989. − Т. 29. − № 2. − С. 171–183.
85. Емеличев В. А. Условия эффективности решения векторной задачи оптимизации / В. А. Емеличев, А. В. Пашкевич, О. А. Янушкевич // Дискретная математика. − 1999. − Т. II. − Вып. 1. − С. 140–145.
86. Емеличев В. А. Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения I, II / В. А. Емеличев // Кибернетика. – 1971. – № 6. – С. 109–121 ; 1972. – № 2. – С. 92–103.
87. Емеличев В. А. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М. : Наука, 1981. – 342 с.
88. Емеличев В. А. Сложность дискретных многокритериальных задач / В. А. Емеличев, В. А. Перепелица // Дискретная математика. – 1994. – Вып. 1. – С. 3–33 ; 1994.− Вып. 6. – С. 5−32.
89. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т Н. Барболина. – К. : Наукова думка, 2008. – 159 с.
90. Емец О. А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве

сочетаний с повторениями / О. А. Емец // Український математичний журнал. – 1994. – Т 46. – № 6. – С. 680–691.
91. Емец О. А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках / О. А. Емец, Л. Н. Колечкина // Кибернетика и системный анализ. – 2004. − № 3. – С. 156−169.
92. Еремин И. И. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования / И. И. Еремин, Н. И. Астафьев. – М. : Наука, 1976. – 192 с.
93. Еремин И. И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования / И. И. Еремин, В. Д. Мазуров, Н. И. Астафьев. – М. : Наука, 1983. –336 с.
94. Ермольев Ю. М. Математические методы исследования операций / Ю. М. Ермольев, И. И. Ляшко, В. С. Михалевич. – К. : Вища школа, 1979. – 312 с.
95. Ермольев Ю. М. Экстремальные задачи на графах / Ю. М. Ермольев, И. М. Мельник. – К. : Наукова думка, 1970. – 175с.
96. Ємець О. О. Деякі операції та відношення над нечіткими числами / О. О. Ємець, Ол-ра О.Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 5. – С. 39–46.
97. Ємець О. О. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв’язків / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна // Український математичний журнал. – 2000. – Т. 52. – № 12. – С. 1630–1640.
98. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна. – К. : Наукова думка, 2005. – 118 с.
99. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах : властивості та розв’язування / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2006. – 130 с.
100. Ємець О. О. Розв’язування багатокритеріальної задачі з лінійними критеріями на множині переставлень / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, А. М. Нагірна // Вісник Хмельницького національного університету. – 2005. − № 5. − С. 345−347.

101. Жуковин В. Е. Нечеткие многокритериальные модели принятия решений / В. Е. Жуковин. – Тбилиси, 1988. – 231 с.
102. Жуковский В. И. Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности / В. И. Жуковский, В. С. Молоствов. – М. : Изд-во МНИИПУ, 1988. – 267 с.
103. Жуковский В. И. Риск многокритериальных и конфликтных систем при неопределенности / В. И. Жуковский, Л. В. Жуковская. – М. : Эдиториал УРСЭ, 2004. – 272 с.
104. Журавлев Ю. И. Избранные научные труды / И. Ю. Журавлев. – М. : Магистр, 1998. – 420 с.
105. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация : учеб. пособие / Ю. П. Зайченко. – К. : Вища школа, 1991. – 198 с.
106. Зыков А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. – М. : Вузовская книга, 2004. – С. 664.
107. Золотых Н. Ю. Параллельный алгоритм нахождения общего решения системы линейных неравенств / Н. Ю. Золотых, С. С. Лялин // Вестник ННГУ. – 2009. – № 5. – С. 193–199.
108. Кини Р. Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.
109. Кирсанов М. Н. Графы в Maple / М. Н. Кирсанов. − М. : Физматлит, 2007. − 168 с.
110. Кондрук Н. Е. Алгоритм кластеризації критеріального простору для задач вибору / Н. Е. Кондрук, М. М. Маляр // Вісник Київського університету. Серія : фіз.-мат. наук, Вип. 3. – К., 2006.
111. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации / М. М. Ковалев. – Минск : Университетское, 1987. –220 с.
112. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация / М. М. Ковалев. – Минск : Изд-во БГУ, 1977. – 192 с.
113. Когут П.І. Про розв’язність одного класу задач векторної оптимізації / П.І. Когут, І.В. Нечай // Наукові вісті. – 2006. − № 5. – С. 148-158.
114. Козерацкая Л. Н. Задачи дискретной оптимизации: исследование устойчивости / Л. Н. Козерацкая, Т. Т. Лебедева, И. В. Сергиенко // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – № 1. – С. 12–30.

115. Козин И. В. Принципы симметрии в теории принятия решений / И. В. Козин. – Запорожье : Полиграф, 2008. – 164 с.
116. Колечкина Л. Н. Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений : структурные свойства решений / Л. Н. Колечкина // Artificial Intelligence and Decision Making : Supplement to International Journal «Information Technologies and Knowledge». – 2008. – Vol. 2. − P. 180–186. – (Intern. Book Series «Information science and computing» ; № 7).
117. Колечкина Л. Н. Многокритериальные комбинаторные задачи оптимизации на множестве полиразмещений / Л. Н. Колечкина, Е. А. Родионова // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 152–160.
118. Колечкина Л. Н. Моделирование прикладных задач векторными задачами на комбинаторных конфигурациях / Л. Н. Колечкина, Е. А. Родионова // Радиоэлектроника и информатика. – 2009. – № 3. − С. 62−68.
119. Колечкина Л. Н. О нахождении Парето-оптимальных решений в многокритериальных комбинаторных задачах на множестве размещений / Л. Н. Колечкина // Теорія оптимальних рішень. – 2008. – № 7. – С. 109–116.
120. Колечкина Л. Н. Об одном алгоритме решения комбинаторных задач / Л. Н. Колечкина // Комп'ютерна математика в науці, інженерії та освіті : матеріали третьої міжнар. наук.-технічної конф., (Полтава, 1−31 жовт. 2009 р.). – К. : Вид-во НАНУ, 2009. − С. 19.
121. Колечкина Л. Н. Об одном алгоритме решения комбинаторных задач векторной оптимизации на множестве размещений / Л. Н. Колечкина // Искусственный интелект. – 2010 – № 1. – С. 61–69.
122. Колечкина Л. Н. Обоснование структурированного метода локализации значения линейной функции, заданной на комбинаторной конфигурации перестановок / Л. Н. Колечкина // Динамические системы. – 2009. − № 27. – С. 1−13.
123. Колечкина Л. Н. Оптимальные решения многокритериальных комбинаторных задач на размещениях / Л. Н. Колечкина // Теорія оптимальних рішень. – 2007. – № 6. – С. 67–73.

124. Колєчкіна Л. М. Огляд комбінаторних задач та підходів до їх розв'язання за допомогою графів / Л. М. Колєчкіна, С. Є. Швачко // Економічне відродження України : матеріали VI міжнар. наук.-практ. конф., 22 трав. 2009 р. − К. : Міжнародний науково-технічний університет ім. академіка Юрія Бугая, 2009. – С. 238−239.
125. Колєчкіна Л. М. Властивості задач багатокритеріальної оптимізації на комбінаторних множинах та методи їх розв'язання / М. Л. Колєчкіна. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2008. – 162 с.
126. Колєчкіна Л. М. Моделювання прикладних задач багатокритеріальними комбінаторними задачами на поліперестановках / Л. М. Колєчкіна, О. А. Родіонова // Волинський математичний вісник. – 2009. − Вип. 6. − С. 72−86. – (Серія «Прикладна математика»).
127. Колєчкіна Л. М. Моделювання та розв'язування економічних задач оптимізації відносних показників з урахуванням комбінаторних властивостей розв'язку / Л. М. Колєчкіна, А. М. Нагірна // Наукові вісті Нацаціонального технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2006. – № 5. – С. 34–40.
128. Колєчкіна Л. М. Питання розв'язування комбінаторних багатокритеріальних задач на множині полі розміщень / Л. М. Колєчкіна, О. А. Родіонова // Наука – практика – освіта : матеріали V міжвуз.наук.-практ. конф., 23 трав. 2008 р. / упоряд. Л. Т. Коломієць. – К. : ЗАТ «ДОРАДО», 2008. – С. 153−157.
129. Колєчкіна Л. М. Постановка задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на полірозміщеннях та підхід до розв'язання / Л. М. Колєчкіна, О. А. Родіонова // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – №. 1. – С. 84–88.
130. Колчин В. Ф. Случайные графы / В. Ф. Колчин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 208 с.
131. Кондрук Н. Е. Алгоритм кластеризації критеріального простору для задач вибору / Н. Е. Кондрук, М. М. Маляр // Вісник Київського університету. – 2006. − Вип. 3.− С. 124–128. − (Серія фізико – мататематичних наук).
132. Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. – М. : Наука, 1969. – 368 с.

133. Корбут А. А. Метод ветвей и границ: Обзор теории, алгоритмов, программ и приложений / А. А. Корбут, И. Х. Сигал, Ю. Ю. Филькенштейн // Math. Operationsforsch und Statist. − 1977. – Т. 8, № 2. – С. 253–280. – (Ser. Optimiz.).
134. Кормен Т. Х. и др. Часть VI. Алгоритмы для работы с графами / Т. Х. Кормен и др. //Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. Т. Кормен − 2-е изд. − М. : Вильямс, 2006. − С. 1296.
135. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.
136. Кравцов М. К. Линейная свертка критериев в бикритериальной оптимизации / М. К. Кравцов, О. А. Янушкевич // Изв. вузов. Математика. − 1998. − № 12. − С. 63–70.
137. Кравцов М. К. Неразрешимость векторной дискретной оптимизации в классе алгоритмов линейной свертки критериев / М. К. Кравцов // Дискретная математика. − 1996. – Т. 8. – Вып. 2. − С. 89–96.
138. Кравцов М. К. О разрешимости векторной задачи с помощью алгоритма линейной свертки критериев / М. К. Кравцов, О. А. Янушкевич // Математические заметки. − 1997. − Т. 62. – Вып. 4. − С. 502–509.
139. Крейнес М. Г. Алгоритм решения некоторого класса дискретных многокритериальных задач / М. Г. Крейнес, Н. М. Новиков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1983. – Т. 23. – № 3. − С. 214–218.
140. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. − М. : Мир, 1978. – 429 с.
141. Кук Д. Компьютерная математика / пер. с англ. Д. Кук, Г. Бейз. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 384 с.
142. Ларичев О. И. Наука и искусство принятия решений / О. И. Ларичев. – М. : Наука, 1979. – 200 с.
143. Лебедев Б. Д. Задача оптимизации по упорядоченной совокупности критериев / Б. Д. Лебедев, В. В. Подиновский, Р. С. Стырикович // Экономика и математические методы. − 1971. − Т. 7. – Вып. 4. − С. 612–616.
144. Лебедев Б. Д. Задача оптимизации по упорядоченной совокупности критериев / Б. Д. Лебедев, В. В. Подиновский, Р. С. Стырикович // Экономика и математичесие методы. − 1971. − Т. 7. – Вып. 4. − С. 612–616.

145. Лебедева Т. Т. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений / Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова. Т. И. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4 – С. 90–100.
146. Лебєдєва Т. Т. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною / Т. Т. Лебєдєва, Н. В. Семенова, Т. І. Сергієнко // Доповіді НАНУ. – 2003. – № 10. – С. 80–85.
147. Левитская А. А. Одна комбинаторная задача в классе перестановок над кольцом Zn вычетов по нечетному модулю n / А. А. Левитская // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 5. – С. 99–108.
148. Липский В. Комбинаторика для программистов / В. Липский. – М. : Мир, 1988. – 200 с.
149. Лихтенштейн В. Е. Модели и методы дискретного программирования / В. Е. Лихтенштейн. – М. : Наука, 1997. – 240 с.
150. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем / Л. С. Лэсдон. – М. : Наука, 1975. – 432 с.
151. Ляшенко И. Н. Взаимодействия экономики и окружающей среды (эколого-экономическое моделирование) / монография «Экономика и кибернетика в начале XXI века» под научной редакцией Задорожнего Г. В., Михайленко В. Г. – Х. : ХНУ, 2005 – 260 с.
152. Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку / І. М. Ляшенко. – К. : Вища школа, 1999. – 236 с.
153. Ляшенко І. М. Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів / І. М. Ляшенко, М. В. Коробов, І. А. Горіцина. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2009. – 320 с.
154. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів / І. М. Ляшенко, М. В. Коробов, А. М. Столяр. – Т. : Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.
155. Максишко Н. К. Моделі та методи розв'язання прикладних задач покриття на графах та гіперграфах / Н. К. Максишко, Т. В. Заховалко. – Запорожье : Полиграф, 2009. – 244 с.

156. Машунин Ю. К. Методы и модели векторной оптимизации / Ю. К. Машунин. – М. : Наука, 1986. – 140 с.
157. Меламед И. И. Исследование линейной свертки критериев в многокритериальном дискретном программировании / И. И. Меламед, И. Х. Сигал // Журн. вычисл. математики и мат. физики. − 1995. − Т. 35. − № 8. − С. 1260–1270.
158. Меламед И. И. Вычислительное исследование трехкритериальных задач о деревьях и назначениях / И. И. Меламед, И. Х. Сигал // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1998. – Т. 38. – № 10. – С. 1780–1787.
159. Меламед И. И. Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации / И. И. Меламед // Автоматика и телемеханика. − 1997. − № 9. − С. 119–125.
160. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину.– М. : Наука, 1990. – 488 с.
161. Миркин Б. Г. Проблемы группового выбора / Б. Г. Миркин. – М. : Наука, 1974. – 256 с.
162. Михалевич В. С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем / В. С. Михалевич, В. Л. Волкович. – М. : Наука, 1982. – 286 с.
163. Михалевич В. С. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: модели, методы, алгоритмы / В. С. Михалевич, В. А. Трубин, Н. З. Шор. – М. : Наука, 1986. – 264 с.
164. Михалевич В. С. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ / В. С. Михалевич, В. В. Шкурба // Кибернетика. – 1966. – № 2. – С. 34–40.
165. Михалевич М. В. Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии / М. В. Михалевич, И. В. Сергиенко. – К. : Наукова думка, 2005. – 671 с.
166. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / Волкович В. Л. В и др. – К. : Наукова думка, 1993. – 312 с.
167. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели : [пер. с англ.] / Э. Мулен. – М. : Мир, 1991. – 464 с.
168. Недашковский Н. А. Вычислительные алгоритмы для линейных балансовых моделей межотраслевого эколого-

экономического взаимодействия / Н. А. Недашковский, Т. И. Крошка // Кибернетика и системный анализ. – 2010. − № 1. – С. 17–29.
169. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин, И. З. Батыршин, А. Ф. Блишун и др. ; под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.
170. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / под ред. Р. Р. Ягера. – М. : Радио и связь, 1986. – 408 с.
171. Ногин В. Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето / В. Д. Ногин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42. – № 7.− С. 951–957.
172. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В. Д. Ногин. – М. : Физматлит, 2002. – 144 с.
173. Нурлыбаев А. Н. О графе перестановочного многогранника / А. Н. Нурлыбаев // Доклады АН Республики Казахстана. – 1992. – № 3. – С. 14–20.
174. Нурминский Е. А. Проекция на полиэдр во внешнем представлении / Е. А. Нурминский // ЖВМ и МФ, 2008.
175. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, Г. В. Меркурьева и др. – М. : Радио и связь, 1989. – 304 с.
176. Озерной В. М. Методология решения дискретных многокритериальных задач / В. М. Озерной, М. Г. Гафт // Многокритериальные задачи принятия решений. – М. : Машиностроение, 1978. – С. 14–47.
177. Оре О. Теория графов. / О. Оре. − 2-е изд. − М. : Наука, 1980. − С. 336.
178. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
179. Павлов А. А. Особенности решения NP-трудных задач комбинаторной оптимизации / А. А. Павлов, Инхуэйн Ван // Інформатика та нові технології. – 1997. − № 1. – С. 13.
180. Павлов О. А. Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв’язувальних комбінаторних задач / О. А. Павлов,

Л. О. Павлова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 1997. – № 1. – С. 22–26.
181. Палагин А. В. Байесовские процедуры распознавание литературных текстов / А. М. Гупали др. // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 2. – С. 82–89.
182. Панишев А. В. Методы и модели оптимизации в проблеме коммивояжера / А. В. Панишев, Д. Д. Плечистый. – Житомир : ЖДТУ, 2006. – 306 с.
183. Панішев А. В. Вступ до теорії складності дискретних задач / А. В. Панішев, О. М. Данильченко, В. О. Скачков. – Житомир : Житомир. держ. технолог. ун-т., 2004. – 236 с.
184. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир, 1985. – 512 с.
185. Парасюк И. Н. О развитии метода вектора спада на случай размытых окрестностей / И. Н. Парасюк, М. Ф. Каспшицкая // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С. 145−155.
186. Парасюк И. Н. О решении комбинаторной многокритериальной оптимизационной задачи нечетким методом вектора спада / И. Н. Парасюк, М. Ф. Каспшицкая // Компьютерная математика. – 2009. – № 2. – С. 150−158.
187. Перепелица В. А. Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач / В. А. Перепелица, И. В. Сергиенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28. – № 3. – С. 400–419.
188. Перепелица В. А. К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах / В. А. Перепелица, И. В. Сергиенко // Кибернетика. – 1987. – № 5. – С. 85–93.
189. Перепелица В. А. Полиномиальные и NP-полные многокритериальные задачи перечисления альтернатив / В. А. Перепелица, И. В. Сергиенко // Теория и программная реализация методов дискретной оптимизации. – К. : Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, 1989. – С. 58–69.
190. Побудова і дослідження методів та інформаційних технологій розв’язання оптимізаційних дискретних задач великої розмірності / І. В. Сергієнко та ін. // Фундаментальні

орієнтири науки. Математика, інформатика, механіка : зб. статей за матеріалами проектів ДФФД. – К. : Академперіодика, 2005. – С. 23–42.
191. Подиновский В. В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В. В. Подиновский, В. М. Гаврилов. – М. : Сов. радио, 1975. – 192 с.
192. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 256 с.
193. Полищук Л. И. Анализ многокритериальных экономико-математических моделей / Л. И. Полищук. – М. : Наука, 1989. – 182 с.
194. Поспелов Г. С. Процедуры и алгоритмы формирования комплексных программ / Г. С. Поспелов, В. А. Ириков, А. Е. Курилов. – М. : Наука, 1985. – 424 с.
195. Пшеничный Б. Н. Комбинаторный метод решения общей задачи выпуклого программирования / Б. Н. Пшеничный, Э. И. Ненахов, В. Н. Кузьменко // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4 – С. 121–134.
196. Пшеничный Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М. : Наука, 1975. – 287 с.
197. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы: теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. − М. : Мир, 1980. − 476 с.
198. Реклейтис Г. Оптимизация в технике : в 2 т. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгедел. – М. : Мир, 1986.
Т 1. – 1986. − 352 с.
Т 2. – 1986. − 364 с.
199. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ / Дж. Риордан. − М. : Иностранная литература, 1963. – 288 с.
200. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М. : Мир, 1973. – 470 с.
201. Романовский И. В. Дискретный анализ / И. В. Романовский. – С.Пб. : Невский диалект, 2000. – 240 с.
202. Рощин В. А. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования / В. А. Рощин, Н. В. Семенова, И. В. Сергиенко // Кибернетика. – 1989. – № 2. – С. 42–47.

203. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ / К. А. Рыбников. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 308 с.
204. Рыбников К. А. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / К. А. Рыбников. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 368 с.
205. Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем / В. Н. Салий, А. М. Богомолов. − М. : Физико-математическая литература, 1997.
206. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. – М. : Наука, 1977. – 320 с.
207. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 384 с.
208. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхулалирман. – М. : Мир, 1984. – 455 с.
209. Семенова Н. В. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв'язання / Н. В. Семенова, Л. М. Колєчкіна. – К. : Наукова думка, 2009. – 262 с.
210. Семенова Н. В. Векторные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: условия оптимальности и подход к решению / Н. В. Семенова // Artificial Intelligence and Decision Making : Supplement to International Journal «Information Technologies and Knowledge». – 2008. – Vol. 2. − P. 187–195.
211. Семенова Н. В. Гарантирующие и оптимистические решения задач целочисленной оптимизации с выпуклыми квадратичными функциями ограничений / Н. В. Семенова // Теорія оптимальних рішень. – 2006. – № 5.– С. 39– 46.
212. Семенова Н. В. Методы поиска гарантирующих и оптимистических решений задач целочисленной оптимизации в условиях неопределенности данных / Н. В. Семенова // Кибернетика и системный анализ. – 2007. –№ 1. – С. 103–114.
213. Семенова Н. В. Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: полиэдральный подход к их решению / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 118–126.

214. Семенова Н. В. О решении векторных задач частично дискретной оптимизации / Н. В. Семенова // Комп'ютерна математика. – 2008. – № 2.– С. 156–164.
215. Семенова Н. В. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина, А. Н. Нагорная // Кибернетика и системный анализ – 2008. – № 3 – С. 158–172.
216. Семенова Н. В. Поліедральний підхід до розв'язання одного класу векторних задач комбінаторної оптимізації / Н. В. Семенова, Л. М. Колєчкіна, А. М. Нагірна // Доповіді НАН України. – 2009. – № 6. – С. 46–53.
217. Семенова Н. В. Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на множестве полиперестановок / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина, А. Н. Нагорная // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 26–41.
218. Семенова Н. В. Розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації на множині поліперестановок / Н. В. Семенова, Л. М. Колєчкіна, А. М. Нагірна // Доповіді НАН України. – 2009. – № 2. – С. 41– 48.
219. Семенова Н. В. Розв'язування задач векторної оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв на комбінаторній множині полірозміщень / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина, А. Н. Нагорная // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2009. – № 2. – С. 53–60.
220. Семенова Н. В. Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации / Н. В. Семенова // Теорія оптимальних рішень. − 2008. – № 7. – С. 153–160.
221. Семенова Н. В.Об одном подходе к решению векторных задач с дробно-линейными функциями критериев на комбинаторном множестве размещений / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина, А. Н .Нагорная // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 1. – С. 131–144.
222. Сергиенко И. В. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, Л. Н. Козерацкая, Т. Т. Лебедева. – К. : Наукова думка, 1995. − 170 с.

223. Сергиенко И. В. Методы предсказания пространственной структуры белков / И. В. Сергиенко и др. // Кибернетика и системный анализ. – 2010. − № 1. – С. 38–59.
224. Сергиенко И. В. О проблеме отыскания множества альтернатив в дискретных многокритериальных задачах / И. В. Сергиенко, В. А. Перепелица // Кибернетика. – 1987. − № 5. – С. 85–93.
225. Сергиенко И. В. Предсказание вторичной структуры белков на основе байесовских процедур распознавания на цепях Маркова / И. В. Сергиенко и др. // Кибернетика и системный анализ. – 2007. − № 2. – С. 59–64.
226. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – К. : Наукова думка, 2003. – 264 с.
227. Сергиенко И. В. Задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными: точные и приближенные решения / И. В. Сергиенко, Н. В. Семенова // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 6. – С. 75–86.
228. Сергиенко И. В. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, Л. Н. Козерацкая, Т. Т. Лебедева. – К. : Наукова думка, 1995. – 171 с.
229. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И. В. Сергиенко. – К. : Наукова. думка, 1988. – 471 с.
230. Сергиенко И. В. Метод неявного перебора для решения некоторых экстремальных задач на множествах / И. В. Сергиенко, В. А. Рощин // Обчислювальна та прикладна математика. – 1996. – Вип. 80. – С. 106–118. – (Серія «Оптимізація»).
231. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наукова думка, 1981. – 288 с.
232. Сергиенко И. В. Некоторые задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными и их решение / И. В. Сергиенко, В. А. Рощин, Н. В. Семенова // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 6. – С. 116–123.

233. Сергиенко И. В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации / И. В. Сергиенко, Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 6. – С. 39–46.
234. Сергиенко И. В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. – К. : Наукова думка, 2009. – 640 с.
235. Сергієнко І. В. Інформатика та комп’ютерні технології / І. В. Сергієнко. – К. : Наукова думка, 2004. – 432 с.
236. Сергієнко І. В. Інформатика в Україні: становлення, розвиток, проблеми / І. В. Сергієнко. – К. : Наукова думка, 1999. – 354 с.
237. Сигал И. Х. Параметризация приближенных алгоритмов решения некоторых классов задач дискретной оптимизации большой размерности / И. Х. Сигал // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 6. – С. 63–72.
238. Сигал И. Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы / И. Х. Сигал, А. П. Иванова. – М. : Физматлит, 2003. – 240 с.
239. Соболь И. М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И. М. Соболь, Р. Б. Статников. – М. : Наука, 1981. – 107с.
240. Современное состояние теории исследования операций / под ред. Н. Н. Моисеева. – М. : Наука, 1979. – 464 с.
241. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. – М. : Мир, 1990. – 440 с.
242. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – К. : Наукова думка, 1986. – 268 с.
243. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2005. – 104 с.
244. Стоян Ю. Г. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей / Ю. Г. Стоян, В. З. Соколовский. – К. : Наукова думка, 1980. – 205 с.
245. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.

246. Схрейвер А. Теори линейного и целочисленного программирования : в 2 т. / А. Схвейер. – М. : Мир, 1991.
Т. 1. – 1991. – 362 с.
Т. 2. – 1991. – 704 с.
247. Танаев В. С. Математические модели и методы календарного планирования / В. С. Танаев, Ю. Н. Сотсковым, В. А. Струсевичем. – Мн. : Універсітэцкае, 1994. – 304 с.
248. Танаев В. С. Теория расписаний: Одностадийные системы. / В. С. Танаев, В. С. Гордон, Я. М. Шафранский. – М. : Наука, 1984. – 206 с.
249. Танаев В. С. Введение в теорию расписаний / В. С. Танаев, В. В. Шкурба. – М. : Наука, 1975. – 256 с.
250. Татт У. Теория графов / пер. с англ. / У. Татт. − М. : Мир, 1988. − 424 с.
251. Таха Х. А. Введение в исследование операций : в 2 кн. / Х. А. Таха. – М. : Мир, 1985.
Кн. 1. – 1985. − 480 с.
Кн. 2. – 1985. − 496 с.
252. Теория расписаний и вычислительные машины / под ред. Э. Г. Кофмана. – М. : Наука, 1984. – 334 с.
253. Тимофеева Н. К. Комбинаторные функции в задаче размещения / Н. К. Тимофеева / Компьютерная математика. – 2004. − № 1. – С. 47–56.
254. Тимофеева Н. К. О некоторых свойствах разбиений множества на подмножества / Н. К. Тимофеева // Управляющие системы и машины. – 2002. – № 5. – С. 6–23.
255. Тимофеева Н. К. О способах образования аргумента целевой функции в задачах комбинаторной оптимизации / Н. К. Тимофеева // Кибернетика и ситемный анализ. – 2002. − № 6 – С. 96–103.
256. Тимофеева Н. К. Самонастраивающиеся алгоритмы нахождения неопределенных параметров в задачах комбинаторной оптимизации / Н. К. Тимофеева // Управляющие системы и машины. – 2009. − № 4. – С. 43–51.
257. Тимофеева Н. К. Упорядочение множества значений аргумента целевой функции в комбинаторной оптимизации / Н. К. Тимофеева // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 6. − С. 78–87.
258. Трухаев Р. И. Модели принятия решений при неопределенности / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 258 с.

259. Уилсон Р. Введение в теорию графов / пер. с англ. / Р. Уилсон. − М. : Мир, 1977. – 208 с.
260. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
261. Харари Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. − Мир, 1977. Diestel R. Graph Theory, Electronic Edition. – NY : Springer-Verlag, 2005. – С. 422.
262. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. − М. : Мир, 1973. – 300 с.
263. Химические приложения топологии и теории графов / под ред. Р. Кинга / пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 111 с.
264. Холл М. Х. Комбинаторика / М. Х. Холл. − М. : Мир, 1970 – 424 с.
265. Чарин В. С. Линейные преобразования и выпуклые множества / В. С. Чарин. – К. : Вища школа, 1978. – 191 с.
266. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір / Ю. Ю. Червак. – Ужгород : Ужгородський національний університет, 2002. – 312 с.
267. Черников С. Н. Линейные неравенства / С. Н. Черников. – М. : Наука, 1968. – 488 с.
268. Шевченко В. Н. Характеристические многочлены многоиндексных транспортных задач // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15. – № 2. – С. 83–88
269. Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. – М. : Физматлит, 1995. (English. transl. : Shevchenko V. N. Qualitative topics in integer linear programming. – American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.)
270. Шевченко В. Н. О разбиении выпуклого политопа на симплексы без новых вершин // Известия ВУЗ. Математика. – 1997. – № 12. – С. 89–99.
271. Шевченко В. Н. Дискретный анализ и исследование операций / В. Н. Шевченко, Д. В. Груздев. – Сер. 2. – 2006. – Т. 10. – № 1. – С. 53–64.
272. Шевченко В. Н. Об f-векторах пирамидальных триангуляций точечных конфигураций / В. Н. Шевченко, Д. В. Груздев // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2. – 2008. – Т. 15. – № 3. – С. 74–90.
273. Шевченко В. Н. Среднее значение квадрата минора матрицы ограничений аксиальной транспортной задачи

/ В. Н. Шевченко, Е. Б. Титова // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 2. – С. 113–117.
274. Шибанов С. Е. Многокритериальный подход к задаче оптимизации альтернативных маршрутных стратегий в ненадежной сети передачи данных / С. Е. Шибанов, В. П. Шило // Численные методы и технология разработки пакетов прикладных программ. – К. : Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАНУ, 1990. – С. 19–23.
275. Шоломов Л. А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора / Л. А. Шоломов. – М. : Наука, 1989. – 288 с.
276. Шор Н. З. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация / Н. З. Шор, С. И. Стеценко. – К. : Наукова домка, 1989. – 208 с.
277. Шор Н. З. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании / Н. З. Шор, Д. И. Соломон. – Кишенев : Штиинца, 1989. – 204 с.
278. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения / Р. Штойер. – М. : Радио и связь, 1992. – 504 с.
279. Элементы теории геометрического проектирования / С. В. Яковлев, Н. И. Гиль, В. М. Комяк и др.; под ред. В. Л. Рвачева. – К. : Наукова думка, 1995. – 240 с.
280. Яковлев С. В. Оптимизационные задачи синтеза стохастических матриц / С. В. Яковлев // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 4. – С. 36–38.
281. Яковлев С. В. Свойства эвклидовых комбинаторных множеств-расстановок с повторениями и без повторений / С. В. Яковлев // Проблемы бионики. – 1989. − № 42. – С. 90–95.
282. Яковлев С. В. О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного многогранника с учетом линейных ограничений / С. В. Яковлев, О. А. Валуйская // Доповіді НАН України. – 1999. – № 4. – С. 103–108.
283. Яковлев С. В. О некоторых классах задач оптимизации на множестве размещений и их свойствах / С. В. Яковлев, И. В. Гребенник // Известия вузов. Математика. – 1991. – № 11. – С. 74–86.

284. Aardal K. Polyhedral techniques in combinatorial optimization I: Computations / K. Aardal, S. Hoesel // Statist. Neerlandica. – 1996. – № 15. – P. 3–26.
285. Aardal K. Polyhedral techniques in combinatorial optimization II : Computations / K. Aardal, S. Hoesel // Ibid. – 1999. – Issue 53. − P. 131 – 177.
286. Aardal K., Van Hoesel C.P.M. Polyhedral techniques in combinatorial optimization I: Theory // Statistica Neerlandica. – 1999. – V. 53. – №. 2. – P. 131–177.
287. Arora S. R. Enumeration technique for the set covering problem with a linear fractional functional as its objective function / S. R. Arora, M. C. Puri // ZAMM. – 1977. – Pt. 3,Vol. 57. – P. 181–186.
288. Avis D., Bremer D., Seidel R. // Computational Geometry: Theory and Applications. – 1997. – V. 7. – № 5–6. – P. 265–301.
289. Bauschke H. H., Borwein J. V. On Projection Algorithms for Solving Convex Feasibility Problems // SIAM Revs. – 1996. – 38(3). – P. 367–426.
290. Blum C. An introduction to metaheuristic techniques / C. Blum, A. Roli, E. Alba // Parallel metaheuristics: A new class of algorithms (Ed. E. Alba). – Hoboken: John Wiley & Sons. − 2005. – P. 3–42.
291. Blum C. Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison / C. Blum, A. Roli // ACM Computing Surveys. – 2003. – № 3. – P. 268–308.
292. Blum C. An introduction to metaheuristic techniques / C. Blum, A. Roli, E. Alba; ed. E. Alba // Parallel metaheuristics: A new class of algoritms. – Hoboken : John Wiley Sons. – 2005. – 203 p.
293. Blum C. Vetaheuristics in Combinatorial Optimization Overview fnd Conctptual Comparison / C. Blum, A. Roli // ACM Computing Surveys. – 2003. – Vol. 35. – № 3. – P. 268−308.
294. Burkard R. E. A relationship between optimality and efficiency in multichteria 0-1 programming problems / R. E. Burkard, H. Keiding, J. Krapup, P. M. Pruzan // Comput. Oper. Res. − 1981. − V. 8. – № 2. − P. 241–247.

295. Chadha S. S. Dual for a linear fractional program with variable coefficients / S. S. Chadha // Mathematical Reports of Academia Science Canada. – 1995. – Vol. 17. – №. 1. – P. 43–48.
296. Chadha S. S. Duality for a family of nonlinear fractional programming problems / S. S. Chadha, R. A. Heeg // Mathematical Reports of Academia Science Canada. – 1996. – Vol. 18. – №. 6. – P. 237–242.
297. Chinchuluum A. A survey of recent developments in multiobjective optimization / A. Chinchuluum, P. M. Pardalos // Ann. Oper. Res. – 2007. – Vol. 154. – P. 29–50.
298. Christofides N. Graf Theory: An Algorithmic Approach / N. Christofides. – New York; London; San Francisco: Academ. Press, 1975. – 275 p.
299. Calpine H. C. Some properties of Pareto-optimal choices in decision problems / H. C. Calpine, A. Golding // OMEGA. – 1976. − Vol. 4, № 2. − P. 141–147.
300. Dattorro J. Convex Optimization and Euclidean Distance Geometry. Meboo Publishind: Palo Alto, California, 2005.
301. Deriving the number of «good» permutations, with applications to cryptography / C. Cooper, R. Gilchrist, I. N. Kovalenko, D. Novakovic // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 5. – С. 10–17.
302. Diestel R. Graph Theory, Electronic Edition / R. Diestel. – NY : Springer-Verlag, 2005. – С. 422.
303. Ehrgott M. A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization / M. Ehrgott, X. Gandibleaux // OR. Spektrum – 2000. – Vol 22. – P. 425–460.
304. Emelichev V. A. The tests of efficiency for a discrete multicriteria optimization problem d’analyse numerique et de theorie de l’approximation / V. Emelichev, O. A. Yanushkevich // Romania. − 1998. − V. 27. − № 2. − P. 237–242.
305. Fukuda K. // Lecture Notes in Computer Science / K. Fukuda, A. Prodon. 1996. – V. 1120. – P. 91–111
306. Gaiha P. Adjacent vertices on a permutohedron / P. Gaiha, S. Gupta // SIAM Journal Appl. Math. – 1977. – Vol. 32. – № 2. – P. 323–327.
307. Grundel D. On the Number of Local Minima for the Multidimensional Assignment Problem / D. Grundel, P. Krokhmal, C. Oliveira, P. Pardalos // J. Of Combinatorial Optimization. – 2007. − № 13. – P. 1–18.

308. Gulati T. R. Efficiency in linear fractional vector maximization problem with nonlinear constraints / T. R. Gulati, M. A. Islam // Optimization. – 1989. – Vol. 20. – № 4. – P. 477–482.
309. Jansson C. Rigorous solution of linear programming problems with uncertain data / C. Jansson, S.M. Rump // ZOR-methods and Models of Oper. Res. – 1991. – P. 87–111.
310. Kearfott R. B. Applications of interval computations: an introsuction / R. B. Kearfott, V. Kreinovich. – Dordrecht : Kluwer, 1996. – P. 1–22.
311. Kelley I. E. The cutting plane method for solving convex programs / I. E. Kelley // SIAM Journal. – 1960. – Vol. 8. – P. 703–712.
312. Kornbluth J. S. H. Multiple objective linear fractional programming / J. S. H. Kornbluth, R. E. Steuer // Management Science. − 1981. – Vol.27, № 9.− P. 1024–1039.
313. Lebedeva T. T. Stability of vector integer optimization problems with quadratic criterion functions / T. T. Lebedeva, N. V. Semenova, T. I. Sergienko // Theory of stochastic processes. – 2004. – № 3–4. – P. 95–101.
314. Malivert C. Structure of efficient sets for strictly quasi convex objectives / C. Malivert, N. Boissard // Journal of Convex Analysis. – 1994. – Vol. 1, № 2. – C.143–150.
315. M. M. Deza, M. Laurent. Geometry of Cuts and Metrics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
316. Motzkin T. S., Raiffa H., Thompson G. L., Thrall R. M. // Contributions to Theory of Games. V. 2. Princeton University Press: 1953.
317. On the Number of Lokal Minima for the Multidimensional Assignmtnt Problem / Grundel D., Krokhmal P., Oliveira C., Pardalos P. // Journal of Combinatorial Optimization. – 2007. – № 13. – P. 1−18.
318. Pacelli G. Optimization of a linear fractional function on a hypersphere of an affine space / G. Pacelli // Journal Optimiz. Theory and Appl. – 1995. – Vol. 84, № 2. – P. 407–414.
319. Papadimitriou C. H. Combinatorial optimization: algorithms and complexity / C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz. – [second ed.] – N. Y. : Dover Publications, 1998. – 496 p.
320. Semenova N. Multicriterion problems on the combinatorial set of polyarrangements / N. Semenova, L. Kolechkina // Supple-

ment to International Journal «Information Technologies and Knowledge». – 2009. – Vol. 2. − P. 115–127.
321. Semenova N. V. Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria / N. V. Semenova, L. M. Kolechkina, A. M. Nagirna // Information Theories and Applications. – 2008. – Vol. 15. – № 3. – P. 240–245.
322. Smale S. Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints / S. Smale // J. Math. Econ. – 1974. – № 1. – P. 213−221.
323. Steuer R. E. Multiple criteria decision making combined with finance: a categorized bibliography / R. E. Steuer, P. Na // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol. 150. – P. 496–515.
324. Takeda E. Multiple criteria decision problems with fuzzy domination structures / E. Takeda, T. Nishida // Fuzzy sets and syst. – 1980. – Vol. 3. – P. 123–136.
325. Teghem J. Jr. A survey of techniques for finding efficient solutions to multi-objective integer linear programming / J. Jr. Teghem, P. L Kunsch // Asia-Pacific of Operational Research. – 1986. − Vol. 3. − P. 95–108.
326. Toshihide I. Integer programming formulation of combinatorial optimization problems / I. Toshihide // Discrete mathematic. – 1976. − Vol. 16, № 1. − P. 39–52.
327. Veselov S. I., Chirkov A. J. // Discrete Optimization. – 2009. – V. 6. – №. 2. – P. 220–222.
328. Vincke Ph. Analysis of multicriteria decision aid in Europe / Ph. Vincke // European Journal of Operational Research. – 1986. – Vol. 25. – P. 160−168.
329. Ziegler G. M. Lectures on Polytopes. Springer, 2007
330. Yaman H. The robust spanning tree problem with interval data / H. Yaman, O. E. Karasan, M. C. Pinar // Oper. Res. Letters. – 2001. – Vol. 29. – P. 31–40.
331. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Kirsanov2007ru.pdf
332. http://vuz.exponenta.ru/PDF/book/GrMaple.pdf

Монографія

Донець Георгій Панасович
Колєчкіна Людмила Миколаївна

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ

Головний редактор М. П. Гречук
Комп'ютерна верстка О. С. Корніліч

Підписано до друку 16.11.2010 р.
Формат 60×84/16. Тираж 300 прим. Ум. друк. арк. 19,3.
Папір 70 г/м^2. Гарнітура «Таймс». Зам. № 230/452

Видавництво
Вищого навчального закладу Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»

36014, Полтава-14, вул. Коваля, 3, кімн. 115

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 3827 від 8.07.2010 р.

Видрукувано з оригінал-макета у редакційно-видавничому відділі видавництва Вищого навчального закладу Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»
36014, Полтава-14, вул. Коваля, 3, кімн. 115