УДК 517.176

Про нові формули для чисел Фібоначчі

Т. П. Гой*, к.ф.-м.н., доцент*
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», tarasgoy@yahoo.com

У статті встановлені формули для обчислення визначників матриць Тепліца – Гессенберга спеціального вигляду, елементами яких є числа Фібоначчі. Це дозволило отримати деякі нові формули для чисел Фібоначчі.

Goy T. P. On new formulae for Fibonacci numbers. In this paper, we investigate some families of Toeplitz – Hessenbers determinants the entries of which are the Fibonacci numbers. These studies have led us to discover new Fibonacci identities.

Ключові слова: ПОСЛІДОВНІСТЬ ФІБОНАЧЧІ, МАТРИЦЯ ТЕПЛІЦА – ГЕССЕНБЕРГА, ВИЗНАЧНИК.
Keywords: FIBONACCI SEQUENCE, TOEPLITZ – HESSENBERG MATRIX, DETERMINANT.

Матрицею Тепліца – Гессенберга *n*-го порядка називають матрицю вигляду

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де $a_0 \neq 0$ і $a_k \neq 0$ хоча б для одного $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Справджується формула [6]

$$\det(A_n) = (-a_0)^n \sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!} \frac{a_1^{s_1}\cdots a_n^{s_n}}{a_0^{s_1+\cdots+s_n}}, \quad (2)$$

де підсумовування здійснюється за усіма невід'ємними цілими числами, що задовольняють рівність $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n.$

Нехай $\{F_n\}_{n\geq 0}$ – послідовність Фібоначчі, тобто послідовність цілих чисел, які задовольняють рекурентне рівняння

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

з початковими умовами $F_0 = 0,\ F_1 = 1$.

Відомо, що числа Фібоначчі володіють багатьма чудовими властивостями та мають численні застосування, зокрема, у теорії інформації [1, 4, 5,7].

Твердження 1. *Справджуються формули*

$$\det\left(1, F_0, F_1, ..., F_{n-1}\right) = (-1)^{n-1}, \quad n \geq 2,$$

$$\det\left(1, F_1, F_2, ..., F_n\right) = \frac{1-(-1)^n}{2}, \quad n \geq 1,$$

$$\det\left(1, F_2, F_3, ..., F_{2n+1}\right) = 0, \quad n \geq 3,$$

$$\det\left(1, F_0, F_2, ..., F_{2n-2}\right) = (-1)^n (1-2^{n-1}), \quad n \geq 1,$$

$$\det\left(1, F_2, F_4, ..., F_{2n}\right) = (-1)^{n-1} n, \quad n \geq 1,$$

$$\det\left(1, F_1, F_3, ..., F_{2n-1}\right) = -(-2)^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$\det\left(1, F_3, F_5, ..., F_{2n+1}\right) = (-1)^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Усі формули Твердження 1 можна довести за допомогою методу математичної індукції.

Використовуючи до визначників з Твердження 1 формулу (2) та виконуючи нескладні перетворення, одержано нові формули для сум добутків чисел Фібоначчі (послідовних, з парними і непарними індексами).

Твердження 2. *Справджуються формули*

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!} F_0^{s_1} F_1^{s_2} \cdots F_{n-1}^{s_n} = -1, \quad n \geq 2,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!} F_1^{s_1} F_2^{s_2} \cdots F_n^{s_n} = \frac{(-1)^n - 1}{2}, \quad n \geq 1,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!} F_2^{s_1} F_3^{s_2} \cdots F_{n+1}^{s_n} = 0, \quad n \geq 3,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!} F_0^{s_1} F_2^{s_2} \cdots F_{2n-2}^{s_n} = 1-2^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}\frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}F_2^{s_1}F_4^{s_2}\cdots F_{2n}^{s_n}=-n,\quad n\geq 1,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}\frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}F_1^{s_1}F_3^{s_2}\cdots F_{2n-1}^{s_n}=-2^{n-2},\quad n\geq 2,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}\frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}F_3^{s_1}F_5^{s_2}\cdots F_{2n+1}^{s_n}=-1,\quad n\geq 2,$$

де підсумовування здійснюється за усіма невід'ємними цілими числами, що задовольняють рівність $s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n$.

Деякі з наведених формул анонсовані в [2, 3].

Висновки. Доведені нові формули для обчислення визначників матриць Тепліца – Гессенберга спеціального вигляду, елементами яких є числа Фібоначчі (послідовні, з парними чи непарними індексами). Як наслідок, отримані деякі нові формули для сум добутків чисел Фібоначчі з поліноміальними коефіцієнтами.

Література

1. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1984. – 144 с.
2. Goy T. Elementary problems and solutions. Problem B-1192 / T. Goy // Fibonacci Quarterly. – 2016. – Vol. 54(3). – P. 272.
3. Goy T. Elementary problems and solutions. Problem B-1210 / T. Goy // Fibonacci Quarterly. – 2017. – Vol. 55(2) (*to appear*).
4. Hoggatt V. E. Fibonacci and Lucas Numbers / V. E. Hoggatt. – Boston : Houghton Mifflin, 1969.
5. Koshy T. Fibonacci and Lucas Numbers and Application / T. Koshy. – New York : John Wiley & Sons, 2001.
6. Merca M. A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix / M. Merca // Special Matrices. – 2013. – Vol. 1. – P. 10–16.
7. Vajda S. Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Application / S. Vajda. – Chichester : Ellis Horwood, 1989.