УДК 519.6

ОЦІНКИ ЕФЕКТИВНОСТІ ГІБРИДНОГО АЛГОРИТМУ МЕТОДУ ІТЕРАЦІЇ НА ПІДПРОСТОРІ

***О. В. Чистяков**, м.н.с.*
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
alexej.chystyakov@gmail.com

Розглядається ефективність гібридного алгоритму методу ітерацій на підпросторі для розв'язування часткової задачі на власні значення стрічкових матриць.

Chistyakov A.V. Evaluations of the efficiency of the hybrid algorithm of the method of iterations on the subspace. Described efficiency of the hybrid algorithm the method of iterations on the subspace of solving of partial eigenvalue problem of matrix.

Ключові слова: ЕФЕКТИВНІСТЬ, ГІБРИДНИЙ АЛГОРИТМ.

Keywords: EFFICIENCY, HYBRID ALGORITHM.

В останні роки багатоядерні комп'ютери (CPU) з графічними процесорами (GPU) − гібридні комп'ютери широко використовуються для розв'язування задач великих розмірів. Ці комп'ютери вважаються недорогими і можуть забезпечити значне прискорення обчислень. Однак при створенні алгоритмів для таких комп'ютерів необхідно провести попередній аналіз їх ефективності. Згідно із законом Амдала час розв'язування задачі на паралельному комп'ютері складається з двох величин: часу виконання послідовних операцій і часу виконання паралельних операцій з урахуванням числа процесорних елементів [1]. Однак при розв'язуванні на гібридному комп'ютері до часу фактичного розв'язання задачі додається час виконання додаткових операцій, необхідних для обміну інформацією між CPU та GPU, тобто накладні витрати, які можуть бути дуже суттєві.

Пропонується деяка методика визначення ефективності гібридного алгоритму для розв'язування алгебраїчної проблеми власних значень стрічкових додатно-означених матриць:

$$Ax = \lambda Bx, \quad A, B \in M^{n\times n}, \quad x \in C^n, \quad \lambda \in C, \tag{1}$$

де $M^{n\times n}$ – множина квадратних матриць порядку n.

Цей метод є узагальненням методу обернених ітерацій і полягає в побудові послідовності підпросторів E_t (t = 1, 2, ...), яка зводиться до підпростору E_8, що містить шукані власні вектори. На t-й ітерації обчислюється ортонормований базис підпростору E_t, а якщо досягнута збіжність, то визначаються шукані власні пари [1].

Реалізація гібридного алгоритму методу ітерацій на підпросторі базується на факторизації матриці A плитковим гібридним алгоритмом LL^T-розвинення [2].

На кожній ітерації виконуються такі підзадачі:

1) розв'язування СЛАР кожним процесом: $AX_t = Y_{t-1}$;

2) обчислення на GPU проекції матриці A на підпростір E_t

$$A_t = X_t^T Y_{t-1} \equiv X_t^T A X_t;$$

3) обчислення за участю GPU прямокутної матриці $W_t = BX_t$;

4) обчислення проекції матриці B на підпростір E_t (виконується з використанням GPU): $B_t = X_t^T W_t \equiv X_t^T B X_t$;

5) розв'язування проблеми власних значень для проекцій $A_t Z_t = B_t Z_t ?_t$; (розв'язується кожним процесом незалежно);

6) обчислення наступного наближення $Y_t = W_t Z_t$ (операції виконуються паралельно на CPU);

7) перевірка умов закінчення ітераційного процесу:

$$\frac{\left|\lambda_i^{(t)} - \lambda_i^{(t-1)}\right|}{\lambda_i^{(t)}} \le \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Якщо умова (7) виконуються після t ітерацій, то наближеним розв'язком задачі вважається:

$$\lambda_i^* = \lambda_i^{(t+1)}, \qquad X^* = X_{t+1} Z_{t+1} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Тут, як і при перевірці умов закінчення ітераційного процесу, мається на увазі, що власні значення впорядковано за зростанням $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_r \le \dots$. Результат роботи гібридного алгоритму – обчислені власні значення λ_i та розподілена між процесами у відповідності до розподілу матриць A та B матриця відповідних власних векторів.

Аналізуючи гібридний алгоритм ми бачимо, що розв'язування СЛАР (1) проводиться багато разів з однією і тією ж матрицею, тому доцільно виконати LL^T-розвинення матриці до початку ітераційного процесу. Обсяг обчислень в підзадачах

(1) та (3) на порядок або більше перевищує обсяг обчислень у решті підзадач. Для оцінки алгоритму будемо використовувати коефіцієнти прискорення $S_p = T_1 / T_p$ та ефективності $E_p = S_p / p$, де T_p – час розв'язання задачі на гібридному комп'ютері з p CPU та p GPU; T_1 – час розв'язання тієї ж задачі з одним CPU та одним GPU. Кількість арифметичних операцій, що виконує один GPU, оцінюється величиною: $O_p = \frac{ms^2}{p} + ms\frac{m+sp}{p^2} + m^2 s\frac{p-1}{p^2}$.

Одержуємо оцінки прискорення та ефективності алгоритму:

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} \cong \begin{cases} p, & \frac{s^2(m+sp)}{p^2 n_o} \geq t_B \log_2 p \\ \dfrac{p(m+2s)}{s + m\frac{p-1}{p} + \frac{pn_o}{s^2 t_G} t_B \log_2 p}, & \frac{s^2(m+sp)}{p^2 n_o} \geq t_B \log_2 p \end{cases},$$

$$E_p = \frac{S_p}{p} \cong \begin{cases} 1, & \frac{s^2(m+sp)}{p^2 n_o} \geq t_B \log_2 p \\ \dfrac{(m+2s)}{s + m\frac{p-1}{p} + \frac{pn_o}{s^2 t_G} t_B \log_2 p}, & \frac{s^2(m+sp)}{p^2 n_o} \geq t_B \log_2 p \end{cases},$$

де t_C –час виконання однієї арифметичної операції на CPU, t_G – однієї арифметичної операції на GPU, n_o – кількість арифметичних операцій, які можуть бути виконані одночасно на GPU, t_I – час пересилки одного блоку від CPU до GPU і назад, t_B – час обміну блоком між двома GPU, s – порядок блоку, m – напівширина стрічки.

Література

1. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – К.: Наук. думка, 2008. – 248 с.
2. Хіміч О.М., Баранов А.Ю. Гібридний алгоритм розв'язування лінійних систем зі стрічковими матрицями прямими методами // Компьютерная математика. – 2013, 2. – С. 80– 87.