УДК 519.6

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ БІГАРМОНІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЖОРСТКО ЗАЩЕМЛЕНОЇ ПЛАСТИНИ

О.М Литвин, проф., д. ф-м наук
Українаська інженерно-педагогічна академія
academ_mail@ukr.net
І.С. Томанова, магістр, аспірант
Українаська інженерно-педагогічна академія
tomanova.iryna@gmail.com

В даній роботі наведений загальний алгоритм для побудови сплайнів 5-го степеня для розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини на області, яка обмежена багатокутником.

Lytvyn O.M, Tomanova I.S In this work the general algorithm for constructing spline of the 5th degree for solving biharmonic problems for clamped plate is presented on area which is limited by a polygon.

Ключові слова: СПЛАЙНИ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ, БІГАРМОНІЧНА ЗАДАЧА, РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНЕ НАВАНТАЖЕННЯ.

Keywords: SPLINES OF THE FIFTH DEGREE, BIHARMONIC PROBLEM, UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD.

Наведемо загальний алгоритм побудови сплайнів 5-го степеня для розв'язання бігармонічної задачі жорстко защемленої пластини на області G.

1. Область G розбиваємо прямими на під області. Далі кожна з цих під областей розбивається на трикутники однією із діагоналей. Отримані трикутники задаються набором з трьох точок вигляду (x_i, y_i), $i = \overline{1,m}$, які є вершинами трикутників на які розбивається область G.

Трикутник $T = T_{ijk}\ \ i, j, k \in \{1,2,...,m\},\ i \neq j \neq k$.

В результаті такого розбиття задана область G буде розбита на N трикутників.

2. Вводимо лінійну нумерацію невідомих параметрів, які відповідають функціям базисних поліномів 5-го степеня $h_{0,0}, h_{1,0}, h_{0,1}, h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}$ відповідно, для кожної з вершин трикутників. Причому для вершин трикутників, які знаходяться на границі області G задля задоволення граничних умов задачі відповідні константи покладаються рівними нулю.

3. Продовжуємо лінійну нумерацію для невідомих параметрів, які відповідають функціям базисних поліномів 5-го степеня при нормалях до середин сторін трикутників. Згідно з граничною умовою, якщо точка $M_{ij} \in \partial G$, то константу в цій точці покладемо рівній нулю.

В результаті пунктів 2 та 3 отримаємо набір з K невідомих параметрів.

4. Записуємо кусково-поліноміальну функцію, яка на кожному із трикутників розбиття матиме наступний вигляд:

$$S_5^{ijk}(x,y) = w(x,y) + \sum_{(i,j)\in Q}^{3} \left(c_{ij} - \frac{\partial w}{\partial \upsilon_{ij}} \right)\Bigg|_{M_{ij}} \cdot H_{i,j}(x,y) \qquad (1)$$

де $w(x,y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{0 \le |\beta| \le 2} c_{i,\beta} \cdot h_{i,\beta}(x,y)$, $c_{i,\beta}$ – невідомі параметри, що відповідають функціям $h_{i,\beta}$, $c_{i,j}$ – невідомі параметри, що відповідають нормалям до середини сторони трикутника із вершинами *i* та *j*.

5. Використовуємо отримані сплайни для знаходження інтегралів вигляду:

$$I_k = \int_{T_k} \left(\left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial y^2} \right)^2 - 2 f(x,y) S_k(x,y) \right) dxdy.$$

6. Запишемо функціонал $I = I(c)$ вигляду:

$$I = \sum_{k=1}^{N} I_k .$$

7. Мінімізуємо отриманий функціонал I за змінними c. За допомогою необхідної умови екстремуму, знаходимо оптимальні значення констант, розв'язавши наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 ,\ i = \overline{1,K}.$$

8. Підставляємо отримані значення у формулу (1) і отримуємо наближений розв'язок бігармонічного рівняння для жорстко защемленої пластини на заданій області G.

Література

1. Сергиенко И.В., Литвин О.Н., Литвин О.О., Денисова О.И. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике. – Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Том 50, № 5. – С. 17-33

2. *Zlamal, M.* Matematical aspect of the finite element method / M. Zlamal, A. Zenesek, V. Kolar, J. Kratochvil // Technical physical and mathematical principles of the finite element method. – 1971. – P.15–39

3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики–М.: Наука, 1977. – 456 с.