РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЦЭМИ

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ
ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

АКАДЕМИЯ НАУК РАН
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНЫЙ СОВЕТ "ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОФЭ"

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН

СИСТЕМЫ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Краткие тезисы докладов

Двенадцатая конференция
(г. Нарва-Йыэссуу, 16-20 апреля 1992 г.)

МОСКВА 1992

№19

АКАДЕМИЯ НАУК РАН
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНЫЙ СОВЕТ "ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОФЭ"

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН

СИСТЕМЫ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Краткие тезисы докладов

Двенадцатая конференция
(г. Нарва-Йыэссуу, 16-20 апреля 1992 г.)

Москва 1992

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ НА ОБЩЕМ ЕВКЛИДОВОМ МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ

О.А.Емец
Харьков

Рассмотрим общее множество K-размещений [I], образованных из элементов набора $g=\{g_1,\dots,g_\eta\}$, содержащего n различных элементов $g^1,\dots,g^n$. Обозначим его через $A^K_{\eta n}(g)$. Не нарушая общности, можем считать, что $g_1 \leqslant \dots \leqslant g_\eta$, $g^1<\dots<g^n$. Количество элементов g^i в наборе g обозначим через η_i. Очевидно, что $\eta_1+\dots+\eta_K=\eta$. Под K-размещением понимается выборка $x=(x_1,\dots,x_K)$ объемом K ($K\leqslant\eta$) из элементов набора g (при $K=\eta$ K-размещение называют перестановкой). Таким образом, $x_i=g_m$; $x_j=g_\ell$ при $i\neq j$, $m\neq \ell$; $i,j\in J_K=\{1,2,\dots,K\}$; $m,\ell\in J_\eta$. Отобразим [I] множество $A^K_{\eta n}(g)$ в арифметическое евклидово пространство R^K. Его образ назовем общим евклидовым множеством размещений и обозначим через $E^K_{\eta n}(g)$. Отметим, что точки множества $E^K_{\eta n}(g)$ – это K-размещения x, рассматриваемые как элементы пространства R^K. Обозначим $\operatorname{int} X$ множество внутренних точек множества X, а $J^0_K=J_K\cup\{0\}$.

Теорема. Пусть $\varphi(x)$ – конечная выпуклая функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве $X\subset R^K$, причем $E^K_{\eta n}(g)\subset X$, тогда $\forall y\in \operatorname{int} X$

$$\min_{x\in E^K_{\eta n}(g)} \varphi(x) \geqslant \varphi(y)-(p(y),y)+\sum_{i=1}^{S} p_{\beta_i}(y)g_i+\sum_{i=S+1}^{K} p_{\beta_i}(y)g_{\eta-K+i},$$

где $p(y)=(p_1(y),\dots,p_K(y))$ – субградиент функции $\varphi(x)$ в точке y, перестановка $\beta_1,\dots,\beta_K$ элементов множества J_K и константа $S\in J^0_K$ определяются условием

$$p_{\beta_1}(y)\geqslant p_{\beta_2}(y)\geqslant\dots\geqslant p_{\beta_S}(y)\geqslant 0 > p_{\beta_{S+1}}(y)\geqslant\dots\geqslant p_{\beta_K}(y). \qquad (I)$$

Следствие. Чтобы точка $y=(y_1,\dots,y_K)\in E^K_{\eta n}(g)$ доставляла минимум на множестве $E^K_{\eta n}(g)$ конечной выпуклой на выпуклом замкнутом множестве $X \subset R^K$ функции $\varphi(x)$, $E^K_{\eta n}(g) \subset \subset \operatorname{int} X$, достаточно выполнения условия

$$\sum_{i=1}^{S} p_{\beta_i}(y) g_i + \sum_{i=S+1}^{K} p_{\beta_i}(y) g_{\eta-K+i} = (p(y), y),$$

где $p(y) = (p_1(y), \ldots, p_K(y))$ - субградиент функции $\varphi(x)$ в точке y, а константы $\beta_1, \ldots, \beta_K$ и S удовлетворяют соотношению (I).

Полученные результаты дают универсальный подход к оценке глобальных экстремумов на евклидовых комбинаторных множествах размещений (и, в частности, перестановок) известных выпуклых функций. Предоставляется возможность доказывать глобальность и оценивать погрешность получаемого решения в различных алгоритмах локальной оптимизации на $E^K_{\eta n}(g)$. Эти результаты могут быть использованы при реализации различных комбинаторных методов.

Аналоги рассмотренных утверждений для дифференцируемых функций в случае множества сочетаний с повторениями приведены в [2], а в случае перестановок - в [3].

Литература

I. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А. Комбинаторные множества размещений и их свойства.- Харьков, I990.- 33 с.- (Препринт АН УССР/ Ин-т пробл. машиностроения; №342).

2. Емец О.А. Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^K, и свойства задач оптимизации на нем.//Докл. АН УССР.- I99I, №4. - С. 69-72.

3. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике//Докл. АН УССР. Сер. А.- I983, №5. - С. 68-70.

СОДЕРЖАНИЕ