Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України

ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі» (ПУЕТ)

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТА НЕЧІТКІ МНОЖИНИ (КОНеМ – 2013)

Матеріали ІІІ Всеукраїнського наукового семінару

(м. Полтава, 30-31 серпня 2013 року)

За редакцією д. ф.-м. н., професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2013

УДК 519.7+519.8
ББК 22.176
К63

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

Співголови:

Сергієнко Іван Васильович, д. ф.-м. н., професор, академік Національної академії наук України, генеральний директор Кібернетичного центру Національної академії наук України, директор Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України;

Нестуля Олексій Олексійович, д. і. н., професор, ректор ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі».

Члени програмного комітету:

Гуляницький Леонід Федорович, д. т. н., професор, завідувач відділу методів комбінаторної оптимізації та інтелектуальних інформаційних технологій Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України;

Донець Георгій Панасович, д. ф.-м. н., с. н. с., завідувач відділу економічної кібернетики Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України;

Ємець Олег Олексійович, д. ф.-м. н., професор, завідувач кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»;

Заславський Володимир Анатолійович, д. т. н., професор, професор кафедри математичної інформатики Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Каспшицька Марія Фадіївна, к. ф.-м. н., с. н. с. Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України;

Парасюк Іван Миколайович, д. т. н., професор, член-кореспондент Національної академії наук України, завідувач відділу методів та технологічних Засобів побудови інтелектуальних програмних систем Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України;

Стоян Юрій Григорович, д. т. н., професор, член-кореспондент Національної академії наук України, завідувач відділу математичного моделювання і оптимального проектування Інституту проблем машинобудування Національної академії наук України.

К63 Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ – 2013) : матеріали III Всеукр. наук. семінару, (м. Полтава, 30–31 серп. 2013 р.) / за ред. О. О. Ємця. – Полтава : ПУЕТ, 2013. – 87 с. – Текст укр., рос.

ISBN 978-966-184-232-7

У збірнику тез семінару висвітлено сучасну проблематику в таких галузях, як комбінаторна оптимізація та суміжні питання, математичне моделювання і обчислювальні методи, теорія та застосування нечітких множин, сучасні проблеми оптимізації та невизначеності в прийнятті рішень, сучасні проблеми комбінаторики.

Збірник розрахований на фахівців з кібернетики, інформатики, системних наук.

УДК 519.7+519.8
ББК 22.176

Матеріали друкуються в авторській редакції мовами оригіналів.
За виклад, зміст і достовірність матеріалів відповідають автори.

ISBN 978-966-184-232-7

ЗМІСТ

Враховуючи вираз для λ_2, після перетворень першої формули отримаємо остаточний вигляд

$$F_2 = \frac{\beta(\beta-1)}{6}[3n-(\beta+1)(2r-1)+C^3_{\left[\frac{\beta}{2}\right]+1}+\left[\frac{\beta}{2}\right]C^2_{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}-1$$

для $\lambda_2 > 0.$ (11)

Для другого випадку необхідно спочатку зробити $C^3_{\beta-\gamma}+C^3_{\gamma}$ перевірок, а потім ще $F^3_{2,2}(\beta-\gamma,\ \gamma)$ спроб. У результаті перетворень остаточно отримаємо

$$F_2 = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6}(r-2)+C_{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}+\left[\frac{\beta-1}{2}\right]C_{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}-1$$

для $\lambda_2 = 0.$ (12)

Переконаємось на прикладах про справедливість отриманих формул.

Информационные источники

1. В. І. Білецький, Г. П. Донець, Е. І. Ненахов. Комбинаторне розпізнавання. Задачі та їх розв'язування // Теория оптимальных решений. – К. : Ин-т кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, 2012. – С. 21–29.
2. Г. А. Донец, С. Т. Кузнецов. Об одной комбинаторной задаче погического типа // Теория оптимальных решений. – К. : Ин-т кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, 2012. – С. 101–108.

УДК 519.8

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И СЛАБОЙ ДОПУСТИМОСТИ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

О. А. Емец, *д. ф.-м. н., профессор;*
А. О. Емец, *к. ф.-м. н., доцент*
ВУЗ Укоопсоюза «Полтавский университет экономики и торговли»
yemetsli@mail.ru, yemets2008@ukr.net

Во многих задачах возникает необходимость представления данных в интервальном в виде и с помощью нечетких чисел одновременно. В [1] изложен аппарат, связывающий интервалы и нечеткие числа.

В докладе исследуются свойства этого аппарата.

Определение 1. Под *нечеткой линейной системой уравнений*

$$A^f x = b^f \tag{1}$$

будем понимать совокупность пяти интервальных линейных систем [2]

$$\left[\begin{array}{l} I_A^4 x = I_b^4; \\ I_A^3 x = I_b^3; \\ I_A^2 x = I_b^2; \\ I_A^1 x = I_b^1; \\ I_A^0 x = I_b^0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Определение 2 [2]. Под *интервальной линейной системой* уравнений

$$I_A x = I_b \tag{3}$$

понимают семейство всех систем линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{4}$$

где

$$A \in I_A;\ b \in I_b. \tag{5}$$

Определение 3. Система линейных уравнений (4) называется *разрешимой*, если она имеет некоторое решение, и *допустимой*, если она имеет неотрицательное решение.

Определение 4. [2] Система уравнений (3) называется *слабо разрешимой (допустимой)*, если какая-либо из систем (4) с данными (5) разрешима (допустима). Система уравнений (3) называется *сильно разрешимой (допустимой)*, если каждая система (4) с данными (5) разрешима (допустима).

Поставим в соответствие системе уравнений $I_A^t = I_b^t$ с номером t $\forall t = 0, 1, 2, 3, 4$ семейство систем уравнений вида (4) с номером t с данными (5) соответственно:

$$A^t x = b^t, \tag{6}$$

$$A^t \in I_A^t;\ b^t \in I_b^t. \tag{7}$$

Определение 5. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой)* в четком смысле, если какая-либо из систем (6) с данными (7) при $t=4$

$$A^4x = b^4 \tag{8}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (1) называется *сильно разрешимой (допустимой) в четком смысле*, если каждая система (8) с данными (7) при $t=4$ разрешима (допустима).

Определение 6. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой) в квазичетком смысле*, если при $t=3$ какая-либо из систем (6) с данными (7)

$$A^3x = b^3 \tag{9}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (1) называется *сильно разрешимой (допустимой)* в *квазичетком смысле*, если каждая система (9) с данными (7) при $t=3$ разрешима (допустима).

Определение 7. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой) в получетком (в полунечетком) смысле*, если при $t=2$ какая-либо система из систем (6) с данными из (7)

$$A^2x = b^2 \tag{10}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (1) называется *сильно разрешимой (допустимой)* в *получетком (в полунечетком) смысле*, если каждая система (10) с данными (7) при $t=2$ разрешима (допустима).

Определение 8. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой) в квазинечетком смысле*, если при $t=1$ какая-либо система из систем (6) с данными из (7)

$$A^1x = b^1 \tag{11}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (11) называется *сильно разрешимой (допустимой)* в *квазинечетком смысле*, если каждая система (11) с данными (7) при $t=1$ разрешима (допустима).

Определение 9. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой) в нечетком смысле*, если при $t=0$ какая-либо система из систем (6) с данными из (7)

$$A^0x = b^0\,. \tag{12}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (1) называется *сильно разрешимой (допустимой)* в *нечетком смысле*, если каждая система (12) с данными (7) при $t=0$ разрешима (допустима).

Введение определений 3–9 объясняется следующим. Пусть необходимо определить является ли разрешимой некоторая система уравнений

$$A_0 x = b_0,\ A_0 \in R^{m\times n};\ x \in R^n;\ b_0 \in R^m, \tag{13}$$

но о данных этой системы известно только, что

$$A_0 \in A^f,\ b_0 \in b^f.$$

Тогда, очевидно, что система уравнений (13) разрешима, если система уравнений (1) сильно разрешима в четком смысле. Система уравнений (13) не разрешима, если известно, что система уравнений (1) не является слабо разрешимой в нечетком смысле. В других ситуациях она сильно или слабо разрешима с разной степенью нечеткости.

Вектор $x \in R^n$ называется [2] слабым решением интервальной системы уравнений (3), если он удовлетворяет системе уравнений (4) для некоторых A и b, удовлетворяющих условию (5).

Определение 10. Вектор $x^t \in R^n$ называется *слабым решением типа* t ($t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$) нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (1), если он является слабым решением в смысле [2] системы уравнений $I_A^t x = I_b^t$ вида (3).

Свойства нечетких матриц и нечетких систем вида (1)–(2) дает следующее утверждение.

Теорема 1. Имеют место включения:

$$I_A^t \supset I_A^{t+1}\ \ \forall t = 0,1,2,3.$$

$$I_b^t \supset I_b^{t+1}\ \ \forall t = 0,1,2,3.$$

Следствие из теоремы 1. Для $\Delta^t = \frac{1}{2}(\overline{A}^t - \underline{A}^t)$ – матрицы радиусов интервальной матрицы I_A^t и $\delta^t = \frac{1}{2}(\overline{b}^t - \underline{b}^t)$ – вектора радиусов интервального вектора I_b^t, где I_A^t, I_b^t вводятся согласно определения нечеткой матрицы (см. [1]) и определения 1, имеют место неравенства:

$$\Delta^{t+1} < \Delta^t,\ \delta^{t+1} < \delta^t,\ t = 0,1,2,3.$$

Теорема 2. Вектор $x^t \in R^n$ есть слабым решением типа t ($t = 0,1,2,3,4$) нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (1) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет неравенству

$$|A_c^t x^t - b_c^t| \le \Delta^t |x^t| + \delta^t, \tag{14}$$

где $A_c^t = \frac{1}{2}(\underline{A}^t + \overline{A}^t)$ – средняя матрица интервальной матрицы I_A^t;

$\Delta^t = \frac{1}{2}(\overline{A}^t - \underline{A}^t)$ – матрица радиусов интервальной матрицы I_A^t;

$b_c^t = \frac{1}{2}(\underline{b}^t + \overline{b}^t)$ – средний вектор интервального вектора I_b^t;

$\delta^t = \frac{1}{2}(\overline{b}^t - \underline{b}^t)$ – вектор радиусов интервального вектора I_b^t.

Теорема 3. Если вектор $x^t \in R^n$ является слабым решением типа t, $(t = 1,2,3,4)$ нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (1), то он является слабым решением типа $t-1$ этой системы.

Следствие 1 из теоремы 3. Если при $t = 0,1,2,3,4$ вектор $x^t \in R^n$ удовлетворяет неравенству (14) при выполнении условий теоремы 3, то он удовлетворяет и неравенству

$$| A_c^{t-1} x^t - b_c^{t-1} | \le \Delta^{t-1} | x^t | + \delta^{t-1},$$

где обозначения взяты из условия теоремы 3.

Следствие 2 из теоремы 3. Если вектор $x^t \in R^n$ – слабое решение типа t нечеткой системы уравнений $A^f x = b^f$ вида (1), то он является слабым решением типов $t-1, \ldots, 1, 0$.

Замечание 1. Максимальный тип t_{max} слабого решения $x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$ нечеткой линейной системы вида (1) определяет ограничение на значения функции принадлежности элементов этого решения. Очевидно, что $\forall i = \overline{1, n}$ $\mu^t = \mu(x_i^t) \ge \frac{t_{max}}{4}$, т. е. $\mu(x_i^t) \in \left\{ \frac{t_{max}}{4}, \frac{t_{max}}{4} + \frac{1}{4}, \ldots, 1 \right\}$.

Замечание 2. Отметим, что слабое решение системы (1): типа 4 – это слабое решение в четком смысле; типа 3 – в квазичетком смысле; типа 2 – в получетком (или, что тоже самое – в полунечетком) смысле; типа 1 – в квазинечетком смысле; типа 0 – в нечетком смысле.

Введем в рассмотрение вектор $y \in R^m$, координаты которого определим так:

$$y^i = \frac{(A_c^t x^t - b_c^t)_i}{(\Delta^t | x^t | + \delta^t)_i}, \text{ при } (\Delta^t | x^t | + \delta^t)_i > 0,$$

$$i = \{1, 2, ..., m\}; \tag{15}$$

$$y^i = 1, \text{ при } (\Delta^t \mid x^t \mid + \delta^t)_i = 0, \ i = \{1, 2, ..., m\}. \tag{16}$$

Определим $\forall x \in R^m$ вектор $sgn\ x$, i-ая координата, ($i = 1, 2, ..., m$), которого такова:

$$(sgn\ x)_i = \begin{cases} 1, & x_i \ge 0; \\ -1, & x_i < 0. \end{cases}$$

Обозначим D_y для вектора $y \in R^m$ квадратную матрицу из $R^{m \times n}$, в которой его элементы стоят на главной диагонали, а все остальные – нулевые, т. е.

$$D_y = diag(y_1, ..., y_m) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & y_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & y_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\forall x \in R^m$ имеет место представление:

$$| x | = D_z x,$$

где

$$z = sgn\ x, \tag{17}$$

поскольку для произвольного $z \in R^m$ имеем $D_z x = (z_1 x_1, z_2 x_2, ..., z_m x_m)^T$, здесь и далее T – символ транспонирования.

Теорема 4. Если вектор x^t – решение неравенства (14), то он удовлетворяет равенству

$$(A_c^t - D_y \Delta D_z) x^t = b_c^t + D_y \delta^t,$$

где вектор y определяется условием (15), (16) а z – (17) при $x = x^t$.

Теорема 5. Нечеткая линейная система $A^f x = b^f$ вида (3) тогда и только тогда является слабо разрешимой:

1) в четком смысле, когда система $A_{ez}^4 x \le \overline{b}^4$; $-A_{-ez}^4 x \le -\underline{b}^4$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

2) в квазичетком смысле, когда система $A_{ez}^3 x \le \overline{b}^3$; $-A_{-ez}^3 x \le -\underline{b}^3$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

3) в получетком (полунечетком) смысле, когда система $A^2_{ez}x \le \overline{b}^2$; $-A^2_{-ez}x \le -\underline{b}^2$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

4) в квазинечетком смысле, когда система $A^1_{ez}x \le \overline{b}^1$; $-A^1_{-ez}x \le -\underline{b}^1$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

5) в нечетком смысле, когда система $A^0_{ez}x \le \overline{b}^0$; $-A^0_{-ez}x \le -\underline{b}^0$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

Слабая разрешимость в четком ($t = 4$), квазичетком ($t = 3$), получетком ($t = 2$), квазинечетком ($t = 1$) и нечетком ($t = 0$) смыслах системы (1) согласно определений 5–10 означает существование некоторого слабого решения типа t нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$.

Поэтому с учетом теоремы 5 справедливо следующее.

Следствие из теоремы 5. Если нечеткая система $A^f x = b^f$ вида (3) является: 1) слабо разрешимой в четком смысле, то она слабо разрешима в квазичетком смысле; 2) слабо разрешимой в квазичетком смысле, то она слабо разрешима в получетком (полунечетком) смысле; 3) слабо разрешимой в получетком смысле, то она слабо разрешима в квазинечетком смысле; 4) слабо разрешимой в квазинечетком смысле, то она слабо разрешима в нечетком смысле.

То есть, слаборазрешимость является свойством вложенности: из слаборазрешимости при большем t следует ее справедливость и при всех меньших t.

Утверждение 6. Проверка слабой разрешимости нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ вида (1) в любом из 5 смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком, нечетком) является NP-трудной задачей.

Справедливость утверждения следует из того, что проверка слабой разрешимости нечеткой системы (1) – это проверка на слабую разрешимость соответствующей интервальной линейной системы, что в соответствии с [2, теорема 2.12] есть NP-трудной задачей.

О допустимости нечетких линейных систем уравнений

Для характеризации слабой допустимости (в соответствующем смысле $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) нечеткой системы уравнений вида (1) воспользуемся теоремой 2.

Теорема 7. Нечеткая система уравнений $A^f x = b^f$ вида (1) является слабо допустимой (в соответствующем параметре $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ смысле) тогда и только тогда, когда допустима система

$$\underline{A}^t x \le \overline{b}^t,$$
$$-\overline{A}^t x \le -\underline{b}^t.$$

Утверждение 8. Проверка слабой допустимости нечеткой линейной системы (1) в любом из пяти (соответствующих разным $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ смыслах) может быть выполнена с полиномиальными затратами времени.

Замечание 3. Результаты работы обобщаются, при необходимости, на случай рассмотрения более, чем пяти α-уровней [3-4] нечеткого числа.

Замечание 4. Если пик нечеткого числа [1] достигается не в одной точке a_M на отрезке $[\underline{a}_4, \overline{a}_4]$, то результаты роботы обобщаются и на этот случай.

В докладе введены понятия слабой и сильной разрешимости (допустимости) нечеткой линейной системы уравнений в пяти смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком и нечетком). Обоснованы критерии слабой разрешимости и слабой допустимости нечеткой системы уравнений во всех пяти смыслах. Доказаны другие свойства нечетких систем и их слабых решений (во всех пяти смыслах).

Далее целесообразно изучить сильную разрешимости и сильную допустимость нечеткой линейной системы уравнений.

Информационные источники

1. Емец О. А. Представление нечетких систем линейных уравнений через интервальные системы линейных уравнений / О. А. Емец, А. О. Емец // Материалы IV Всеукраинской научно-практической конференции «Информатика и системные науки» (Полтава, 21–23 марта 2013 г.) / под ред. О. А. Емца: тезисы докл. – Полтава : ПУЕТ, 2013. – С. 84–93. – Режим доступа: http://dspace.puet.edu.ua//handle/123456789/1613.
2. Фидлер М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – М. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2008 – 288 с.

3. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1976 – 165 с.
4. Заде Л. А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе. В сб.: Классификация и кластер / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1980. – С. 208–247.

УДК 519.854

ТЕОРЕМА О РЕШЕНИИ БЕЗУСЛОВНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

О. А. Емец, *д. ф.-м. н., профессор;*
Т. В. Чиликина, *к. ф.-м .н.*
tv.0502@mail.ru

В данной работе решается задача безусловной оптимизации линейной функции, заданной на размещениях, с использованием известного решение такой задачи для задания функции на перестановках ([1], теорема 348).

Пусть задано мультимножество G η действительных чисел, среди которых k различных, т. е. $G=\{g_1,...,g_\eta\}$, $g_i \in R^1$ $\forall i \in J_\eta = \{1,2,...,\eta\}$, основа G – упорядоченное множество, $S[G]=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, первичная спецификация G – упорядоченное множество $[G]=\{\eta_1,...,\eta_n\}$, где $\eta_1+...+\eta_n=\eta$, $\eta_i=k_G(e_i)$– кратность элемента в мультимножестве G $\forall i \in J_n$. Здесь и далее J_n– множество первых n натуральных чисел.

Образуем, используя G, общее множество k -размещений $E_{\eta n}^k(G)$, т.е. множество всех упорядоченных k -выборок из G [2].

Рассмотрим такую задачу: найти пару $\langle C^*, x^* \rangle$, где

$$C^* = \min_{x=(x_1,...,x_k)\in E_{\eta n}^k(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j; \quad (1)$$

$$x^* = (x_1^*,...,x_k^*) = \arg\min_{x\in E_{\eta n}^k(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j. \quad (2)$$

Такую задачу, как известно, называют [7] задачей безусловной