УДК 519.8

© 2009

Н. В. Семенова, Л. М. Колєчкіна, А. М. Нагірна

Розв'язання багатокритеріальних задач комбінаторної оптимізації на множині поліперестановок

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Досліджено складні багатокритеріальні задачі на комбінаторній множині поліперестановок. Розглянуто деякі властивості допустимої області комбінаторної багатокритеріальної задачі. Побудовано і обґрунтовано метод розв'язання сформульованих задач. Запропонований підхід може застосовуватися для розв'язування комбінаторних багатокритеріальних задач на поліперестановках.

Інтерес до дослідження багатокритеріальних моделей дискретної оптимізації зумовлений їх широким застосуванням при розв'язанні важливих задач економіки, проектування складних систем, прийняття рішень в умовах невизначеності тощо. Останнім часом в області дослідження різних класів дискретних моделей, розробки нових методів їх розв'язання одержано істотні результати [1–15].

Як відомо, більшість комбінаторних оптимізаційних задач можуть бути зведені до задач цілочислового програмування, але це не завжди виправдано, оскільки при цьому втрачається можливість врахування комбінаторних властивостей задач [2].

Систематичне вивчення властивостей евклідових комбінаторних множин та їх дослідження описані в багатьох роботах. Поряд з добре відомими евклідовими комбінаторними множинами перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів виділяються більш складні структури — полікомбінаторні множини [11, 13]. Підвищений інтерес до комбінаторних та полікомбінаторних конфігурацій зумовлений дослідженнями останніх років в області комп'ютерних технологій при створенні сучасних алгоритмів і програм для розв'язування оптимізаційних задач. Слід відзначити, що задачі евклідової комбінаторної оптимізації на полікомбінаторних множинах невід'ємно пов'язані з комбінаторними многогранниками, що є опуклими оболонками таких множин, і їх властивостями. Властивості переставного многогранника дають можливість звести розв'язання задач на дискретних комбінаторних множинах до їх розв'язання на неперервній допустимій множині, отже виникає можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язання векторних комбінаторних задач на різних комбінаторних множинах, а також розвивати нові оригінальні методи їх розв'язання, використовуючи властивості комбінаторних множин і їх опуклих оболонок.

Дана робота продовжує дослідження багатокритеріальних задач на комбінаторних множинах перестановок, сполучень, відображені в роботах [8, 9]. На підставі встановленого взаємозв'язку між багатокритеріальними задачами на комбінаторних множинах і оптимізаційними задачами на неперервній допустимій множині встановлено деякі структурні властивості допустимої області, множин різних видів ефективних розв'язків, а також сформульовано і доведено ряд теорем про умови оптимальності ефективних розв'язків розглянутих задач. Для векторних задач комбінаторного типу на поліперестановках запропонований один з можливих підходів до їх розв'язання.

1. Основні поняття та означення. Розглянемо основні поняття та означення, необхідні для постановки задачі та викладу основних результатів даної роботи [11, 13].

Мультимножина $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ визначається основою $S(A) = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ і кратністю її елементів $k(e_j) = r_j$, $j \in N_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = q$.

Означення 1. Впорядкованою n-вибіркою з мультимножини A називається набір $a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, де $a_{i_j} \in A \ \forall\, i_j \in N_n$, $\forall\, j \in N_n$, $i_s \neq i_t$, якщо $s \neq t \ \forall\, s \in N_n$, $\forall\, t \in N_n$.

Означення 2. Множина $E(A)$, елементами якої є n-вибірки з мультимножини A, називається евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільних її елементів $a' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$, $a'' = (a''_1, a''_2, \ldots, a''_n)$ виконуються умови $(a' \neq a'') \Leftrightarrow (\exists\, j: \ a'_j \neq a''_j)$, тобто два елементи множини $E(A)$ відмінні один від одного, якщо вони, незалежно від інших відмінностей, розрізняються порядком розміщення елементів, що їх утворюють.

Наведемо множину N_n у вигляді упорядкованого розбиття на s непорожніх підмножин $N_1, \ldots, N_s$, які не перетинаються, а отже для яких виконуються умови: $N_i \bigcap N_j = \varnothing$, $N_i \neq \varnothing$, $N_j \neq \varnothing$, $\forall\, i, j \in N_s$. Позначимо H — множину всіх елементів вигляду: $\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(n)) = (\pi^1, \ldots, \pi^s)$, де π^i — довільна перестановка елементів множини $N_i \ \forall\, i \in N_s$.

Нехай підмультимножина A^{N_i} мультимножини A складається з тих елементів A, номери яких належать множині N_i: $A^{N_i} = \{a_1^{N_i}, \ldots, a_{k_i}^{N_i}\}$, $|N_i| = n_i$.

Означення 3. Множину $P^s_{nk}(A, H) = \{(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) \mid a_{\pi(i)} \in A \ \forall\, i \in N_n, \forall\, \pi \in H\}$ називають загальною множиною поліперестановок. Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини A за неспаданням: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, що буде справедливим і для підмультимножин з A.

2. Властивості множини допустимих розв'язків. Як відомо, комбінаторні множини набувають цікавих властивостей при зануренні в арифметичний евклідів простір. Ці властивості, з одного боку, дозволяють запропонувати оригінальні підходи до розв'язання відповідних оптимізаційних задач. З іншого боку, використання властивостей занурених комбінаторних множин може підвищити ефективність традиційних методів комбінаторної оптимізації. Будемо розглядати, згідно з [11, 13], елементи множини поліперестановок як точки арифметичного евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Нехай вектор a є елементом евклідової комбінаторної множини $E(A)$. Відображення $\varphi\colon E(A) \to E_\varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ називається зануренням множини $E(A)$ в арифметичний евклідовий простір, якщо φ задає взаємно однозначну відповідність $E_\varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ за правилом: для $a = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in E(A)$, $x = \varphi(a)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_\varphi(A)$, $x_j = a_{i_j} \ \forall j \in N_n$. Тоді образ множини поліперестановок в арифметичному евклідовому просторі позначають $E^s_{nk}(A, H)$. У роботах [11, 13] показано, що опуклою оболонкою множини поліперестановок є поліпереставний многогранник $\Pi^s_{nk}(A, H) = \operatorname{conv} P^s_{nk}(A, H)$, множиною вершин якого є множина $P^s_{nk}(A, H)$ поліперестановок: $\operatorname{vert} \Pi^s_{nk}(A, H) = P^s_{nk}(A, H)$.

Теорема 1 [13]. *Множина $\Pi^s_{nk}(A, H)$ визначається сукупністю всіх розв'язків системи*

$$\sum_{j \in N'_i} x_j = \sum_{j=1}^{k_i} a_j^{N_i}, \qquad \forall\, i \in N_s, \tag{1}$$

$$\sum_{j \in \omega^i} x_j \geqslant \sum_{j=1}^{|\omega^i|} a_j^{N_i}, \qquad \forall\, \omega^i \subset N'_i, \qquad \forall\, i \in N_s, \tag{2}$$

де

$$a_j^{N_i} \in A^{N_i}, \qquad N_i' = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{i-1} k_j\right) + 1, \left(\sum_{j=1}^{i-1} k_j\right) + 2, \ldots, \left(\sum_{j=1}^{i} k_j\right) \right\} \qquad \forall\, j \in N_s.$$

Многогранник $\Pi_{nk}^s(A, H)$ називатимемо загальним многогранником евклідової множини поліперестановок. Розглянемо деякі його властивості та його зв'язок з загальною множиною поліперестановок.

Означення 4. Під добутком многогранників $M_1, \ldots, M_s$ розуміють множину $\bigotimes_{i=1}^{s} M_i = \{x \in \mathbb{R}^{d_1+\cdots+d_s} \mid x = (x_1, \ldots, x_s),\ x_i \in M_i\ \forall\, i \in N_s\}$, де M_i є d_i-вимірним многогранником $\forall\, i \in N_s$.

Скористаємося такою лемою [14].

Лема 1.

1. Добутком многогранників є многогранник.

2. $\dim\left(\bigotimes_{i=1}^{s} M_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \dim M_i$, *де* $\dim A$ *— вимірність множини* A.

3. k*-Вимірні грані многогранника* $\bigotimes_{i=1}^{s} M_i$ *утворюють множину з елементами вигляду* $\bigotimes_{i=1}^{s} F_i$, *де* F_i *—* k_i*-вимірна грань многогранника* M_i *та* $k_1 + \cdots + k_s = k$.

Справедливі такі теореми [13].

Теорема 2. $\Pi_{nk}^s(A, H) = \bigotimes_{i=1}^{s} \Pi_{n_i k_i}(A^{N_i})$.

Теорема 3. *Множина* $P_{nk}^s(A, H)$ *збігається з множиною вершин многогранника* $\Pi_{nk}^s(A, H)$.

Теорема 4. *Вершина* $a(\pi) \in \operatorname{vert} \Pi_{nk}^s(A, H)$ *є суміжною до вершини* $a(\sigma) \in \operatorname{vert} \Pi_{nk}^s(A, H)$ *тоді і тільки тоді, коли* $a(\sigma)$ *утворюється з* $a(\pi)$ *переставленням двох нерівних одна одній компонент —* $a_i^{N_i}$ *та* $a_{i+1}^{N_i}$, $j \in N_{n_i - 1}$, $i \in N_s$.

3. Постановка задачі. Розглядаються багатокритеріальні комбінаторні задачі вигляду

$$Z(\Phi, P_{nk}^s(A, H))\colon\ \max\{\Phi(a) | a \in P_{nk}^s(A, H)\},$$

що полягають у максимізації векторного критерію $\Phi(a)$ на евклідовій комбінаторній множині поліперестановок $P_{nk}^s(A, H)$, де $\Phi(a) = (\Phi_1(a), \Phi_2(a), \ldots, \Phi_l(a))$, $\Phi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i \in N_l$.

При відображенні множини поліперестановок $P_{nk}^s(A, H)$ в евклідів простір $\mathbb{R}^n$ сформулюємо задачу $Z(F, X)$ максимізації деякого векторного критерію $F(x)$ на множині X, причому кожній точці $a \in P_{nk}^s(A, H)$ буде відповідати точка $x \in X$, така, що $F(x) = \Phi(a)$.

$$Z(F, X)\colon\ \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$ відповідає функціоналу $\Phi_i(a)$, $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i \in N_l$, X — непорожня множина у $\mathbb{R}^n$, що визначається таким чином: $X = \operatorname{vert} \Pi_{nk}^s(A, H)$, $\Pi_{nk}^s(A, H) = \operatorname{conv} P_{nk}^s(A, H)$. Під відповідністю векторної функції F вектору функціоналів Φ будемо розуміти співвідношення $\Phi(a) = F(\varphi(a))\ \forall\, a \in P_{nk}^s(A, H)$.

Задача $Z(F, X)$ може містити також додаткові лінійні обмеження, що утворюють опуклу многогранну множину $D \subset \mathbb{R}^n$ вигляду $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leqslant d\}$, де $d \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Отже, допустима множина має вигляд: $X = \operatorname{vert} \Pi_{nk}^s(A, H) \bigcap D$.

Розроблено багато різних принципів прийняття рішень в таких задачах. Нас будуть цікавити деякі з найбільш традиційних, пов'язані з виділенням із усієї множини $Y = \{y = F(x) \mid x \in X\}$ множини непокращуваних або оптимальних за Парето, оптимальних за Слейтером, оптимальних за Смейлом векторів. Таким чином, під розв'язанням задачі $Z(F,X)$ будемо розуміти знаходження елементів однієї з таких множин: $P(F,X)$ — множини Парето-оптимальних (ефективних розв'язків), $Sl(F,X)$ — оптимальних за Слейтером (слабо ефективних) розв'язків, $Sm(F,X)$ — оптимальних за Смейлом (строго ефективних) розв'язків. Згідно з [4, 6, 7], для кожного $x \in X$ справедливі твердження:

$$x \in Sl(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) > F(x)\} = \varnothing, \tag{3}$$

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \geqslant F(x), F(y) \neq F(x)\} = \varnothing, \tag{4}$$

$$x \in Sm(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid y \neq x, F(y) \geqslant F(x)\} = \varnothing. \tag{5}$$

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X). \tag{6}$$

Оскільки допустима область X обмежена, то множина $P(F,X)$ непорожня і зовні стійка [15]: $\forall\, y \in X\ \exists\, x \in P(F,X)\colon F(x) \geqslant F(y)$. У випадку нескінченності мультимножини A питання про існування елементів множини $P(F,X)$ вимагає окремого дослідження.

4. Умови оптимальності і властивості множин ефективних розв'язків.

Теорема 5. *Елементи множин $Sm(F,X)$-строго ефективних, $P(F,X)$-Парето-оптимальних, $Sl(F,X)$-слабо ефективних розв'язків багатокритеріальної комбінаторної задачі на поліперестановках вигляду $Z(F,X)$ знаходяться у вершинах поліпереставного многогранника $\Pi^s_{nk}(A,H)$.*

Доведення. Враховуючи співвідношення (6) між введеними множинами ефективних розв'язків, а також, згідно з теоремою 3 з [13], той факт, що множина допустимих розв'язків X є підмножиною множини вершин загального поліпереставного многогранника $\Pi^s_{nk}(A,H)$, тобто $P^s_{nk}(A,H) = \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$, приходимо до справедливості ланцюга включень: $Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset \operatorname{vert}\Pi^s_{\mathrm{nk}}(A,H)$. Теорему доведено.

Нехай функції $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ є лінійними, тобто $f_i(x) = \langle c_i, x\rangle$, $i \in N_l$. Важливі властивості допустимої області X і множин різних видів ефективних розв'язків, зазначені в теоремі 5, а також лінійність функцій векторного критерію дозволяють звести розв'язання задачі $Z(F,X)$ до розв'язання задачі $Z(F,G)$, яка визначена на неперервній допустимій множині $G = \Pi^s_{nk}(A,H) \bigcap D$.

Нехай $C \in \mathbb{R}^{n\times l}$ — матриця, c_j — її вектор-рядок, $i \in N_l$. Многогранник $\Pi^s_{nk}(A,H)$ наведемо у вигляді $\Pi^s_{nk}(A,H) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \pi_i, x\rangle \leqslant \gamma_i, i \in N_p\}$, звівши всі нерівності, що його описують, до одного вигляду ($\leqslant$). Аналіз задачі $Z(F,X)$ проводитимемо з урахуванням властивостей конуса $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \geqslant 0\}$ перспективних напрямків [4] задачі $Z(F,X)$ та опуклих замкнутих конусів $0^+\Pi(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pi_i x \leqslant 0,\ i \in N(y)\}$, де $N(y) = \{i \in N_q \mid \pi_i y = \gamma_i\}$, що можуть бути побудовані для всіх точок $y \in \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$. Очевидно, що $N(y) \neq \varnothing$, $X \subseteq y + 0^+\Pi(y)$. Позначимо $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = 0\}$ — ядро відображення $C\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $\operatorname{int} K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx > 0\}$ — внутрішність конуса K. З формул (3)–(5) випливає, що $\forall\, x \in X$ справедливі твердження

$$x \in Sl(C,X) \Leftrightarrow (x + \operatorname{int} K) \bigcap X = \varnothing, \tag{7}$$

$$x \in P(C,X) \Leftrightarrow x + (K \setminus K_0) \bigcap X = \varnothing, \tag{8}$$

$$x \in Sm(C,X) \Leftrightarrow (x + K) \bigcap X \setminus \{x\} = \varnothing. \tag{9}$$

Справедливі такі теореми.

Теорема 6. $P(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) \subset P(F,X)$, $Sl(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) \subset Sl(F,X)$, $Sm(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) \subset Sm(F,X)$.

Доведення. Оскільки $\operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D \subset G$, то $P(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D \subset$ $\subset P(F,G\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D) = P(F,X)$.

Співвідношення $Sl(F,X) = Sl(F,\operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D) \supset Sl(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D$, $Sm(F,X) = Sm(F,D\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)) \supset Sm(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$ доводяться аналогічно.

Теорема 7. *Якщо допустима множина X задачі $Z(F,X)$ не містить обмежень, що описують опуклу многогранну множину D, або $\Pi^s_{nk}(A,H)\subseteq D$, тобто $X = \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$, то $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$ справедливі твердження:*

$$x\in Sl(F,X) \Leftrightarrow x\in Sl(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H),$$

$$x\in P(F,X) \Leftrightarrow x\in P(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H),$$

$$x\in Sm(F,X) \Leftrightarrow x\in Sm(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H).$$

Доведення. З теореми 6, з урахуванням умови теореми 7, випливає, що $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$ справедливі висловлення:

$$x\in Sl(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) \Rightarrow x\in Sl(F,X),$$

$$x\in P(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) \Rightarrow x\in P(F,X),$$

$$x\in Sm(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) \Rightarrow x\in Sm(F,X).$$

Доведемо зворотні імплікації. Нехай $x\in Sl(F,X)$, звідки, за теоремою 5, випливає, що $x\in \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$. Припустимо, від супротивного, що $x\notin Sl(F,\Pi^s_{nk}(A,H))$. З огляду на лінійність функцій $f_i(x)$, $i\in N_l$, векторного критерію $F(x)$ за теоремою 1 із [6] виконується умова $\operatorname{int}K\bigcap(\Pi(x)-x)\neq\varnothing$, тобто в конусі $(x+\operatorname{int}K)$ лежать деякі точки границі многогранника $\Pi^s_{nk}(A,H)$, отже, існує точка $x^1\in \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$, що належить цьому конусу. Останнє, в силу формули (7), означає, що $x\notin Sl(F,X)$ і приводить до протиріччя з умовою теореми. Інші твердження даної теореми доводяться аналогічно цьому. Доведення завершено.

Наслідок. *За умов теореми 7 справедливі рівності*

$$P(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) = P(F,X),$$

$$Sl(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) = Sl(F,X),$$

$$Sm(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H) = Sm(F,X).$$

Якщо в задачі $Z(F,X)$ допустима область $X = \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$, то для будь-якої точки $x\in \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$ задачі $P(F,X)$ справедливі необхідні і достатні умови оптимальності всіх вказаних вище видів ефективних розв'язків, отримані в [6].

Якщо допустима область X задачі $Z(F,X)$ містить додаткові обмеження, що описують опуклий многогранник D, тобто $X = \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D$ і $\Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D \neq \Pi^s_{nk}(A,H)$, то справедливі лише достатні умови оптимальності.

Теорема 8. $\forall x \in \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$:

$$x \in P(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap D \Rightarrow x \in P(F,X),$$

$$x \in Sl(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X),$$

$$x \in Sm(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X).$$

Доведення. Оскільки $G = \Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D$, то справедливі імплікації

$$\forall x \in \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)\colon x \in P(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in P(F,\Pi^s_{nk}(A,H)\bigcap D) = P(F,G) \Rightarrow x \in P(F,X),$$

$$x \in Sl(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X),$$

$$x \in Sm(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X).$$

Таким чином, теореми 5–8 встановлюють взаємозв'язок між задачею $Z(F,X)$ і задачею $Z(F,G)$, що визначена на неперервній допустимій множині. Це дає можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язування векторних комбінаторних задач на поліперестановках і на цій основі розвивати нові оригінальні методи розв'язання, використовуючи властивості комбінаторних множин і їх опуклих оболонок.

При встановленні різних видів ефективності розв'язків, якщо виконуються необхідні умови оптимальності розглянутого розв'язку, то гарантувати його ефективність не можна, однак, якщо ці умови не виконуються, то даний розв'язок не ефективний. Якщо використовуються достатні умови, то розв'язок, що їх задовольняє, ефективний, у протилежному випадку питання ефективності розв'язків залишається відкритим. Якщо ж застосовуються необхідні і достатні умови, то питання вирішується однозначно: розв'язок ефективний тоді і тільки тоді, коли він задовольняє ці умови.

Якщо задача $Z(F,X)$ не містить лінійних обмежень, що утворюють опуклу многогранну множину $D \subset \mathbb{R}^n$, або $\Pi^s_{nk}(A,H) \subseteq D$, тобто $X = \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$, то при використанні необхідних і достатніх умов оптимальності (теорема 7) процес її розв'язання зводиться до пошуку ефективних розв'язків задачі $Z(F,G)$ на неперервній допустимій множині $G = \Pi^s_{nk}(A,H)$ з наступним вибором з них лише тих, які є вершинами многогранника $\Pi^s_{nk}(A,H)$.

Аналізуючи теореми 6 і 8, приходимо до співвідношень, що існують між задачами $Z(F,X)$ і $Z(F,G)$: якщо $x \in R(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$, то $x \in R(F,X)$, якщо ж $x \notin R(F,G)\bigcap \mid \Pi^s_{nk}(A,H)$, то з цього не випливає, що $x \notin R(F,X)$, де $R(F,X)$ визначає множину $P(F,X)$, $Sm(F,X)$ або $Sl(F,X)$.

5. Загальний підхід до розв'язування векторних задач на комбінаторній множині поліперестановок. Якщо задача $Z(F,X)$ містить додаткові лінійні обмеження, то пропонується такий підхід до її розв'язання:

1) знаходимо ефективні розв'язки задачі $Z(F,\Pi^s_{nk}(A,H))$;

2) перевіряємо їх на належність множині D. Якщо $x \in P(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap D$, то $x \in P(F,X)$;

3) розглянемо допустимі розв'язки $x \in X$ задачі $Z(F,X)$, які є неефективними в задачі $Z(F,\Pi^s_{nk}(A,H))$, тобто $x \in X \setminus P(F,\Pi^s_{nk}(A,H))\bigcap D$, і перевіряємо їх на ефективність. Для цього можна скористатися необхідними і достатніми умовами, сформульованими в [15, с. 187, 188].

Твердження 1. *Допустимий розв'язок x^0 ефективний тоді і тільки тоді, коли він є оптимальним розв'язком задачі*

$$Z^1(F,X)\colon \max\left\{\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \mid x \in X,\ f_i(x) \geqslant f_i(x^0),\ i \in N_m\right\}.$$

Якщо розв'язок x^0 неефективний, то в результаті розв'язання цієї задачі знаходимо ефективний розв'язок x^*, тобто такий, що $F(x^*) \geqslant F(x^0)$.

Продовжуючи дослідження і розвиваючи результати робіт [1, 5, 6, 8–13], автори розробили підхід до розв'язання задачі $Z(F,X)$, оснований на лінійній згортці (агрегації) її часткових критеріїв і подальшому зведенні пошуку розв'язків початкової задачі до розв'язання серії скалярних (однокритеріальних) задач, перевірки оптимальності отриманих розв'язків. Методи розв'язання однокритеріальних задач основані на ідеях декомпозиції, відтинаючих площин Келлі, релаксації. При реалізації запропонованого методу з урахуванням того, що число обмежень досить велике, використовується процедура релаксації, тобто тимчасового відкидання деяких обмежень і розв'язання задачі на більш широкій області.

Таким чином, в роботі досліджено складні багатокритеріальні задачі на комбінаторній множині поліперестановок. Розглянуто деякі властивості допустимої області комбінаторної багатокритеріальної задачі. Побудовано і обгрунтовано метод розв'язання сформульованих задач. Запропонований підхід може застосовуватися для розв'язування комбінаторних багатокритеріальних задач на поліперестановках. Програмна реалізація даного підходу надає можливість досліджувати і знаходити елементи множини Парето-оптимальних розв'язків багатокритеріальних комбінаторних задач з урахуванням інших комбінаторних властивостей області допустимих розв'язків. Подальший розвиток даної роботи буде спрямовано на реалізацію і адаптацію сформульованого алгоритму та на розробку нових методів розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач на полікомбінаторних множинах.

1. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1988. – 472 с.
2. *Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1981. – 287 с.
3. *Сергиенко И. В., Шило В. П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. – Киев: Наук. думка, 2003. – 264 с.
4. *Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 170 с.
5. *Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Семенова Н. В.* О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 6. – С. 39–46.
6. *Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергієнко Т. І.* Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАН України. – 2003. – № 10. – С. 80–85.
7. *Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4. – С. 90–100.
8. *Семенова Н. В., Колечкина Л. Н., Нагорная А. Н.* Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Там же. – 2008. – № 3. – С. 158–172.
9. *Semenova N. V., Kolechkina L. M., Nagirna A. M.* Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Intern. J. Information Theories and Applications. – 2008. – **15**. – P. 240–245.

10. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 265 с.
11. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
12. *Ємець О. О., Колєчкіна Л. М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – Київ: Наук. думка, 2005. – 118 с.
13. *Ємець О. О., Роскладка О. В.* Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язання. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 130 с.
14. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. – Москва: Наука, 1981. – 344 с.
15. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ

Надійшло до редакції 09.06.2008

N. V. Semenova, L. M. Kolechkina, A. M. Nagirna

The solution of multicriterial problems of combinatorial optimization on a set of polipermutations

Complex multicriterial problems on a combinatorial set of polypermutations are studied, and a method to solve such problems is constructed and substantiated. Some properties of the feasible region of a combinatorial multicriterial problem are considered.