Міністерство освіти і науки України
Кіровоградський національний технічний університет

Матеріали
Дванадцятого Міжвузівського науково-практичного семінару

"КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ"

14–15 жовтня 2011 року

Кіровоград
2011

Дванадцятий Міжвузівський науково-практичний семінар
КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Кіровоград, *14–15 жовтня 2011 року*

Засновник семінару – Державна льотна академія України

У збірнику вміщено матеріали Дванадцятого Міжвузівського науково-практичного семінару – ПОВІДОМЛЕННЯ про його роботу, ТЕЗИ 36 наукових доповідей, представлених на семінар.

Сопронюк Ф.О. – д.ф.-м.н., професор, декан факультету комп'ютерних наук Чернівецького національного університету ім. Ю.Федьковича

Філер З.Ю. – д.т.н., к.ф.-м.н., професор каф. математики КДПУ ім. Володимира. Винниченка

Шендеровський В.А. – д.ф.-м.н., професор, віце-президент Українського фізичного товариства (м. Київ)

Ясинський В.К. – д.ф.-м.н., професор, завідувач каф. теорії ймовірності Чернівецького національного університету ім. Ю.Федьковича

Організаційний комітет:

Голова – Семенюта М.Ф., к.ф.-м.н.

Відповідальний секретар – Петренюк В.І., к.ф.-м.н., доцент

Члени оргкомітету:

Виврот Т.М. – кандидат фіз.-мат. наук, Центр досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки НАН України

Гамалій В.Ф. – д.ф.-м.н., професор, зав.каф. екон. кібернетики і маркетингу КНТУ

Дрєєв О.М. – викладач кафедри програмного забезпечення КНТУ

Кузнєцов С.Т. – ст.викладач кафедри інформаційних технологій ДЛАУ

Настоящий В.А. – к.т.н., професор, завідувач кафедри БДМБ КНТУ

Неділько С.М. – к.т.н., професор, ректор ДЛАУ

Петренюк А.Я. – д.ф.-м.н., професор каф. БДМБ КНТУ

Сидоренко В.В. – д.т.н., завідувач кафедри програмного забезпечення КНТУ

Якименко С.М. – к.ф.-м.н., зав. кафедри вищої математики КНТУ

З М І С Т

стор.

деталей на зображені, і лише потім уточнюються їх контрастність. Це дозволяє при рівній кількості переданих біт отримати більш деталізоване зображення за рахунок втрати зональної контрастності.

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ В ОДНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВЗВЕШЕННОЙ ДЛИНЫ СВЯЗУЮЩЕЙ СЕТИ

Емец О.А., Емец А.О.
yemetsli@mail.ru; yemets2008@ukr.net
Полтавский университет экономики и торговли

Рассмотрим задачу минимизации взвешенной длины связующей сети при линейном размещении элементов, которая рассматривалась в [1]. Предлагается использовать метод ветвей и границ (МВГ) к этой задаче, используя [2].

Постановка задачи. Пусть имеется n прямоугольников одинаковых размеров $a \times 1$, которые расположены на декартовой плоскости вдоль оси абсцисс в линейку так, что стороны длины a соседних прямоугольников совпадают, а центр симметрии первого слева прямоугольника находится в начале координат. Центры симметрии прямоугольников соединены между собой связями с весом $c_{pq} \geq 0$ $p \neq q$, $p, q \in J_n = \{1, 2, ..., n\}$. Необходимо определить такое размещение прямоугольников, чтобы взвешенная длина сети, которая связывает центры симметрии прямоугольников, имела наименьшее значение.

Пусть $x_1, ..., x_n$ – абсциссы центров симметрии прямоугольников с номерами $1,\ldots,n$ соответственно, а ординаты $y_1 = ... = y_n = 0$. Взвешенная длина сети, которая связывает центры симметрии прямоугольников, определяется порядком размещения прямоугольников в линейке – некоторой перестановкой $i = (i_1, ..., i_n) \in E_n(J_n)$ из множества $E_n(J_n)$, где $J_n = \{1, 2, ..., n\}$, i_t – номер прямоугольника, который стоит на месте t; $\forall i_t$, $t \in J_n$. Рассмотрим подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, где в первой строке стоят номера мест, в линейке слева направо, а во второй – номера прямоугольников, которые стоят на этих местах, то есть j_t – номер места, на котором стоит прямоугольник с номером t; $\forall j_t$, $t \in J_n$. Тогда взвешенная длина сети определяется функционалом $f(j)$ от перестановки $j = (j_1, ..., j_n) \in E_n(J_n)$: $f(j) = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=p+q}^{n} c_{pq} \,|\, x_{j_p} - x_{j_q} \,|$. Параметры x_t, $\forall t \in J_n$, могут принимать только значения $0,1,2,\dots,n-2,n-1$. Это позволяет с учетом соотношения $x_{j_t} = j_t - 1$ записать $f(j)$ в виде:

$$f(j) = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=p+1}^{n} c_{pq} \,|\, j_p - j_q \,|. \tag{1}$$

Математическая модель задачи принимает вид полностью комбинаторной безусловной е-задачи [1] на перестановках с выпуклой целевой функцией $f(j)$, а именно: найти

$$f^* = f(j^*) = \min_{j \in E_n(J_n)} f(j), \tag{2}$$

$$j^* = \arg \min_{j \in E_n(J_n)} f(j), \tag{3}$$

где $f(j)$ определяется соотношением (1).

С целью использования МВГ к задаче (1)-(3) отметим такое. Не сложно видеть, что выражения $|\, j_p - j_q \,|$ в формуле (1) принимают значение: 1 ($n-1$ раз). Значение 2 принимается этим выражением $n-2$ раза и т.д., значение $n-1$ принимается модулем из (1) один раз. Объединим все значения в мультимножество G с основой $S(G) = (1,2,\dots,n-1)$ и первичной спецификацией $[G] = (n-1; n-2; \dots; 1)$, то есть $G = \{1^{n-1}, 2^{n-1}, ..., j^{n-j}, ..., (n-1)^1\}$. Очевидно, что количество $k = |G|$ элементов в G как количество элементов арифметической прогрессии такое: $|G| = [(n-1)+1] \cdot (n-1)/2 = 0{,}5n(n-1)$. Таким образом, $k = 0{,}5n(n-1)$. Разных элементов в G $\nu = n-1$.

Рассмотрим множество $E_{k\nu}(G)$ перестановок элементов мультимножества

G. Очевидно, что $\forall j \in E_n(J_n)$ $\exists x = (x_1,..., x_k) \in E_{k\nu}(G)$ такое, что $f(j) = F(x)$, где

$$F(x) = \sum_{t=1}^{k} d_t x_t \, , \tag{4}$$

$$\forall p,q \in J_n \ \ \exists t \in J_k ; \ d_t = c_{pq} ; \ x_t = | j_p - j_q | . \tag{5}$$

Легко видеть, что противоположное не верно, то есть не для каждой перестановки $x \in E_{k\nu}(G)$ существует перестановка $j \in E_n(J_n)$, для которых выполняется (4), (5).

Обозначим $D \subset E_{k\nu}(G)$ множество всех таких перестановок $x \in E_{k\nu}(G)$, для которых существует перестановка $j \in E_n(J_n)$ такая, что выполняется (4), (5). Тогда задачу (1)-(3) можно записать в виде эквивалентной задачи: найти

$$F^* = F(x^*) = \min_{x \in E_{k\nu}(G)} F(x) \tag{6}$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_{k\nu}(G)} F(x) \tag{7}$$

при условии

$$x \in D \, , \tag{8}$$

где $F(x)$ линейная функция (4), а значит задача (4), (6)-(8) – это полностью комбинаторная условная е-задача на перестановках с линейной целевой функцией (4) и нелинейными дополнительными ограничениями (8).

Применим к ней МВГ на основе подходов, рассмотренных в [13-15].

<u>Применение метода ветвей и границ.</u> ***1. Правила ветвления допустимого подмножества.*** Дерево ветвления будет иметь от корня $n-1$ уровень с возрастанием номеров от корня (уровень 0) по ветвям до листьев. Ветвление будет происходить «в глубину» с уровня l на уровень $l+1$. А если это не возможно, то «в ширину» – до нового множества текущего l уровня или вершиной ($l-1$)-го уровня. Для иллюстрации действий при этом удобно использовать пример, условие которого приведено дальше.

<u>Пример</u>. Пусть $n = 5$; наддиагональная матрица связей (см. рис. 1а). Для выбора порядка переменных при ветвлении множества допустимых решений упорядочим коэффициенты c_{pq} (то же самое d_t) целевых функций (1), (4):

$$d_{\tau_1} \le d_{\tau_2} \le ... \le d_{\tau_k} \, , \tag{9}$$

а элементы g_t, $t \in J_k$, мультимножества G считаем упорядоченными так:

$$g_1 > g_2 \geq \ldots \geq g_k . \tag{10}$$

Допустимые подмножества первого уровня определяются заданием переменной x_{τ_1} первого подходящего в порядке (10) значения $g_{t_1} = n-1$; $t_1 \in J_k$. При этом образуется мультимножество $\tilde{G} = G - \{g_{t_1}\}$. Допустимое подмножество, которое образовалось, обозначим $D_{t_1}^{\tau_1}$.

Для примера учтем $d_{\tau_1} = 1 < d_{\tau_2} = 2 < d_{\tau_3} = 3 < \ldots \leq d_{\tau_{10}} = 10$. Понятно, что $g_1 = 4$; $g_2 = g_3 = 3$; $g_4 = g_5 = g_6 = 2$; $g_7 = g_8 = g_9 = g_{10} = 1$. Имеем: $x_{\tau_1} = 4$, $d_{\tau_1} = 1$; $t_1 = 1$ и это условие определяет множество $D_{t_1}^{\tau_1}$.

Удобно интерпретировать допустимое подмножество $D_1^{\tau_1}$ в терминах исходной задачи. Рассмотрим матрицу, в которой над главной диагональю стоят значения $|j_p - j_q|$ для $j = (1,2,\ldots,n)$, то есть $j_p = p$, $j_q = q$ $\forall p,q \in J_n$. Для примера – это на рис. 1б.

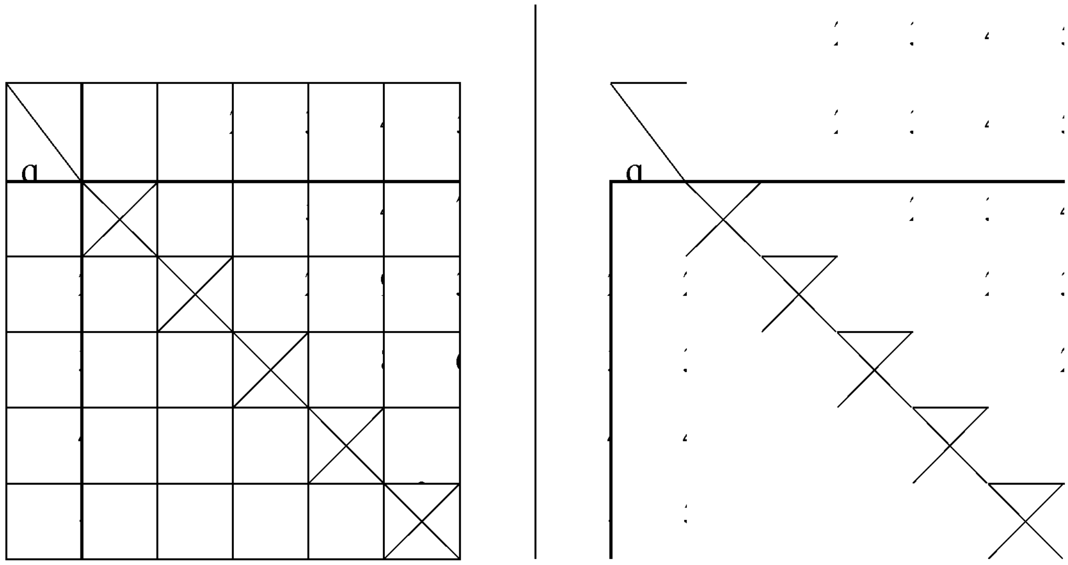


Рис.1 а) Условие примера: вес связейб) Возможные значения модулей

Выбор $g_1 = 4$ означает выбор для $c_{pq} = 1 = d_{\tau_1}$ $j_p = 1$; $j_q = 5$ и (рис. 2а).

То есть выбор τ_1 означает выбор $c_{12} = 1$ и $|j_1 - j_2| = 4$. Это удобно показать рисунком 2а. (Заметим, что из рисунков 2а и 1а видно, что в строке $j_p = 1$ могут стоять только $2, 9, 3$ (см. строку 2 на рис. 1а)). При этом множество $D_1^{\tau_1}$ можно определять условием $j_2 = 1$; $j_1 = 5$, введя для этого множества более удобное обозначение Q_{21}^{15} (верхние индексы – значения j_p, j_q, а нижние – соответствующие им значения p и q).

Следующий уровень ветвления соответствует d_{τ_2} из (9). Из $D_1^{\tau_1}$ образуется $D_{1\,2}^{\tau_1\tau_2}$ (а вообще $D_{i_1\,i_2}^{\tau_1\tau_2}$) $x_{\tau_2} = g_{i_2} = n-2$ (для $D_1^{\tau_1}$ $x_{\tau_2} = g_2$), если это возможно. Третий уровень ветвления соответствует d_{τ_3} из (9), для которого возможно назначить $x_{\tau_3} = g_{i_3} = n-3$ и т. д. Для примера имеем: $D_{1\,2}^{\tau_1\tau_2}$: $x_{\tau_2} = 3$ d_{τ_2} $p = 2$; $q = 3$ $c_{23} = 2$ $j_p = 4$; $j_q = 1$ ($j_3 = 4$; $j_2 = 1$). Это так же означает $c_{31} = 5$ при $j_p = 4$; $j_p = 5$ ($D_{1\,2}^{\tau_1\tau_2} = Q_{213}^{154}$, см. рис. 2б).

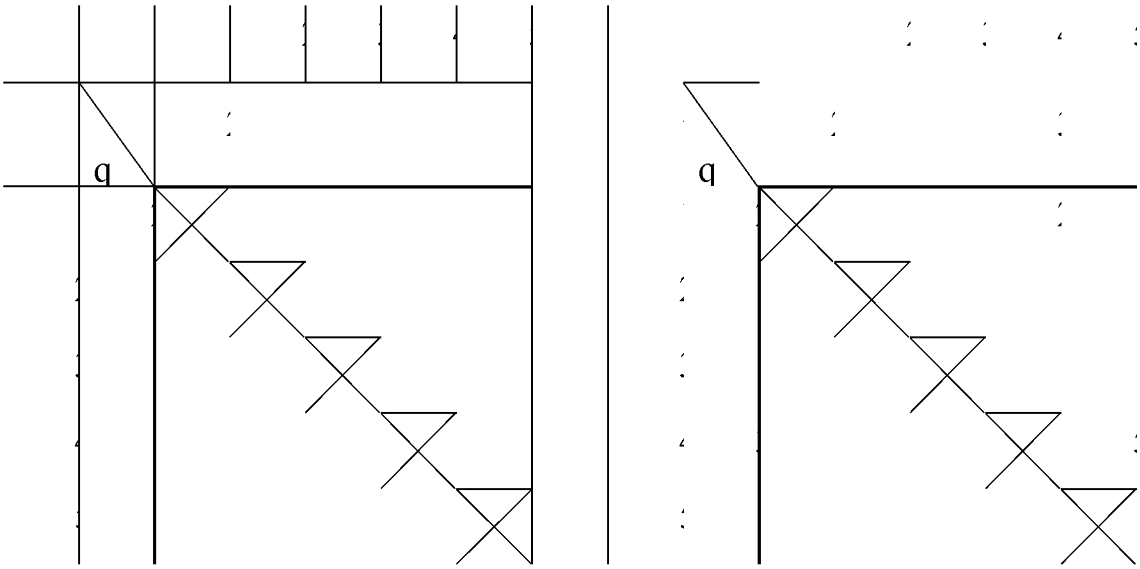


Рис. 2а) Определения $D_1^{\tau_1}$ б) Заполнение для $D_{1\,2}^{\tau_1\tau_2} = Q_{213}^{154}$

Дальше для $D_{1\,2\,3}^{\tau_1\tau_2\tau_3}$ определяются $x_{\tau_3} = n-3 = 2$ в строке $q = 2$ ($j_q = 1$). Судя по рис. 1а, возможно $d_{\tau_3^3} = d_{\tau_3} = 3$ (рис. 3а).

То есть, на первом уровне определяется одно слагаемое в (1) и (4), на втором 2, на третьем 3, на четвертом 4, …., на $(n-1)$-ом уровне $n-1$

слагаемое. Последний $(n-1)$-ый уровень однозначно определяется на $(n-2)$-ом уровне. Поэтому фактически уровней ветвления $n-2$: для первой ветви это $D_1^{\tau_1} = Q_{21}^{15}$; $D_{1\,2}^{\tau_1\tau_2} = Q_{213}^{154}$; $D_{1\,2\,3}^{\tau_1\tau_2\tau_3} = D_{1\,2\,3\,4}^{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4} = Q_{2135}^{1543} = Q_{21354}^{15432} = j^0(5, 1, 4, 2, 3)$. Множество $D_{1\,2\,3}^{\tau_1\tau_2\tau_3} = D_{1\,2\,3\,4}^{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}$ – это одноэлементное множество-перестановка $j^0 = (2, 4, 5, 3, 4) = (5, 1, 4, 2, 3)$. По рис. 1б, 3а легко видеть, что $f(j^0) = F_0 = 1\cdot(9+10+6+5) + 2(3+8+7) + 3(2+4) + \ +1\cdot 4 = 88$. Таким образом, j^0 – допустимое решение, а F_0 – значение целевой функции на нем. При ветвлении «в ширину» на третьем уровне $(l = 3)$ имеем $D_{1\,2\,i_3}^{\tau_1\tau_2\tau_3} = Q_{2134}^{1543} = Q_{21345}^{15432} = j^1 = (5, 1, 4, 3, 2)$; (рис. 3б) $F_1 = f(j^1) = 4\cdot 1 + 3(2+7) +$ $+2(9+6+4) + 1(3+10+8+5) = 95$ (см. рис. 4).

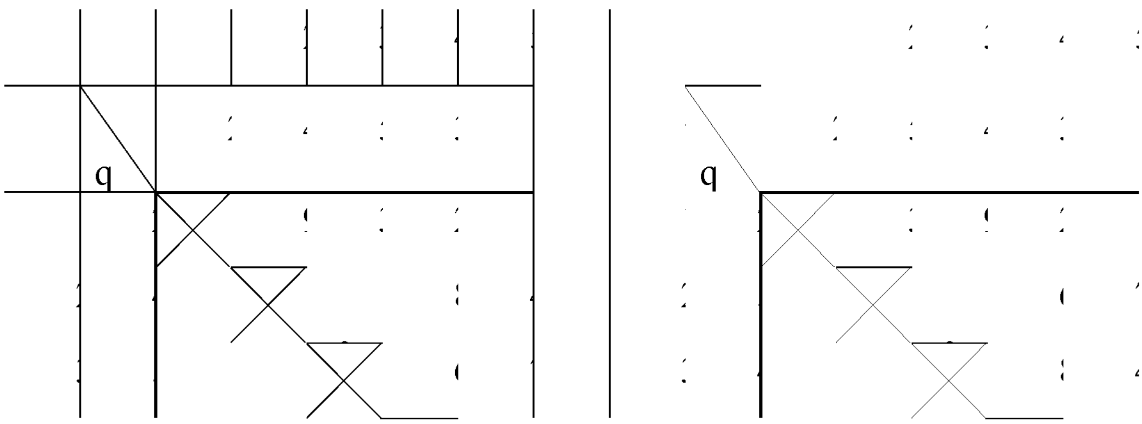
При возвращении на верхний уровень ($l = 2$) имеем $D_{1\,i_2\,i_3}^{\tau_1\tau_2\tau_3^3} = Q_{215}^{154}$, поскольку $c_{pq} = 3$, элемент исходной матрицы связей - это $d_{\tau_3} = c_{25}$. Его ставим в клеточку с $x_{\tau_3} = 2$, это клетка в столбце $j_q = 4$, где $q = 5$ в строке $j_p = 1$; $p = 2$. Получаем $Q_{21534}^{15432} = j^2 = (5, 1, 3, 2, 4)$; $F_2 = f(j^2) = 4\cdot 1 + 3(3+4) + 2(2+10+5) + 1(9+8+6+7) = 89$. (Далее используем только вторые обозначения допустимых множеств (как более удобные)).

$j^3 = Q_{21543}^{15432} = (5, 1, 2, 3, 4)$; $F_3 = f(j^3) = 1\cdot 4 + 3(3+5) + 2(9+6+4) + 1(2+8+10+7) = 93$.

$j^4 = (5, 1, 3, 4, 2)$; $j^5 = (5, 1, 2, 4, 3)$.

$F_4 = f(j^4) = 1\cdot 4 + 3(9+7) + 2(2+10+5) + 1(3+6+8+4) = 107$.

$F_5 = f(j^5) = 1\cdot 4 + 3(9+5) + 2(3+8+7) + 1(2+6+10) = 104$ (см. рис. 4).



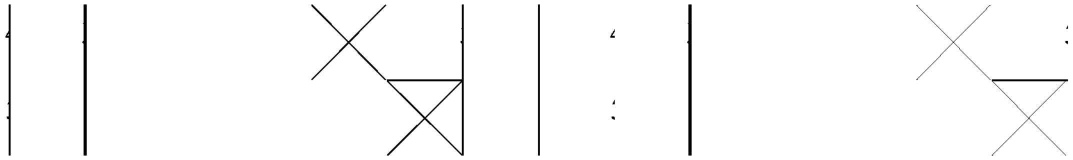


Рис. 3. а). Заполнение для $D^{\tau_1\tau_2\tau_3}_{1\ 2\ 3}$ б) Заполнение для $j^1 = (5, 1, 4, 3, 2)$

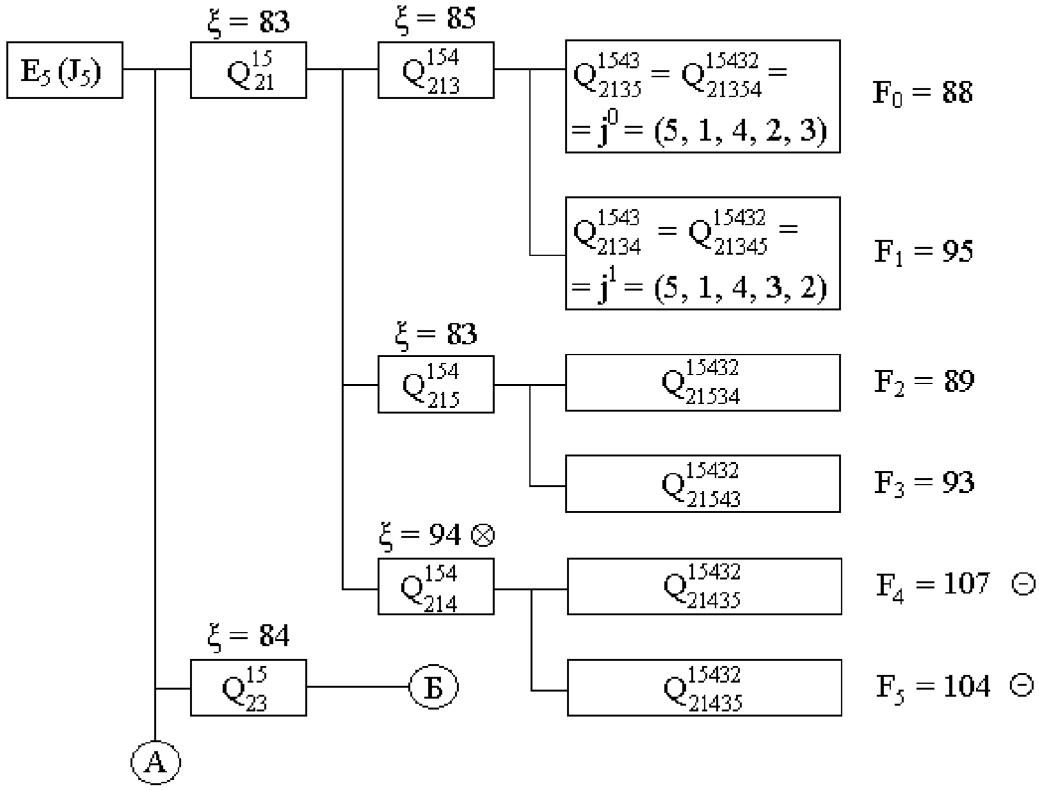


Рис. 4. Фрагмент дерева.

Все возможные ветвления множества Q^{15}_{21} осуществлены, на уровне $l = 1$ разветвляем «в ширину». То есть, рассматриваем все решения, в которых в (4) есть слагаемое $d_{\tau_2} = g_1 = 2 \cdot 4$.

2. Правила оценивания допустимых подмножеств. Як известно, число $\xi(D)$ может служить оценкой допустимого подмножества D в задаче минимизации $F(x)$, если $F(x) \geq \xi(D)\ \ \forall x \in D$.

При нахождении определенного подмножества Q согласно правил ветвления происходит определение некоторого множества переменных $x_{\pi_1}, \ldots, x_{\pi_t} \in X_B \subset D$ в задаче (4)-(8), которые имеют в (4) коэффициенты $d_{\pi_1}, \ldots, d_{\pi_t}$ путем приобретения ними значений $g_{\pi_1}, \ldots, g_{\pi_t} \in G_B \subset G$, то есть $x_{\pi_\alpha} = g_{\pi_\alpha}\ \ \forall \alpha \in J_t$. Обозначим $\widetilde{G} = G - G_B = \{\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_r\}$. $\widetilde{C} = \{d_1, \ldots, d_k\} - \{d_{\pi_1}, \ldots, d_{\pi_t}\} = \{\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_\tau\}$, пусть

$k-t=\tau$, очевидно $|\widetilde{G}|=|\widetilde{C}|=\tau$. Пусть элементы $\widetilde{C}$ и $\widetilde{G}$ пронумерованы так:

$$\widetilde{c}_1 \geq \ldots \geq \widetilde{c}_\tau; \tag{11}$$

$$\widetilde{g}_1 \leq \ldots \leq \widetilde{g}_\tau. \tag{12}$$

Теорема 1. Оценкой $\xi(D)$ некоторого подмножества Q допустимых решений поученного согласно описанных правил ветвления в задаче (4)-(8), может являться величина $\xi(Q)=\xi=\nu+c^*$; $\nu=\sum_{p=1}^{t} d_{\pi_p} g_{\pi_p}$; $c^*=\sum_{q=1}^{\tau}\widetilde{c}_q\widetilde{g}_q$ при выполнении условий (11), (12).

Подсчитаем оценки для подмножества, показанных на рис. 4. Заметим при этом, что оценки «листов» дерева совпадают со значением целевой функции для листа. Оценку множества $\xi(Q)$ на рисунке будем обозначать ξ возле изображения множества.

Найдем $\xi(Q_{21}^{15})=\nu+c^*=\nu_{21}^{15}+c_{21}^{15}$; $v^*=v_{21}^{15}=1\cdot 4$; $c^*=c_{21}^{15}=(\widetilde{c},\widetilde{g})$, где $\widetilde{c}=(10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$ $\widetilde{g}=(1,1,1,1,2,2,2,3,3)$, т.е. $c^*=79$. $\xi(Q_{21}^{15})=83$. Здесь и далее $(\widetilde{c},\widetilde{g})$ обозначает скалярное произведение векторов $\widetilde{c}$, $\widetilde{g}$.

Вычислим $\xi(Q_{213}^{154})=\nu+c^*=\nu_{213}^{154}+c_{213}^{154}$; Как хорошо видно по рис. 2б $\nu_{231}^{154}=4\cdot 1+2\cdot 3+5\cdot 1=15$; $c^*=(\widetilde{c},\widetilde{g})$, где $\widetilde{c}=(10,9,8,7,6,5,4,3)$, $\widetilde{g}=(1,1,1,2,2,2,2,3)$; $c^*=70$. $\xi(Q_{213}^{154})=\nu+c^*=85$.

3 Правила отсечения бесперспективных множеств допустимых решений. Предлагается использовать классическое правило отсечения МВГ: если $\xi(Q)\geq F_0$, где F_0 – текущий рекорд, то Q – бесперспективная вершина, и она отсекается. Если $F_t<F_0$, то рекорд обновляется и стает равным F_t: $F_0:=F_t$. После этого проверяется правило отсечения для всех неразветвленных вершин («почек» дерева).

Таким образом, из рис. 4 видно, что множество Q_{214}^{154} не надо разветвлять (отметим это знаком $\otimes$ возле оценки), а надо отсекать как бесперспективное, поскольку его оценка $\xi=94>F_0=88$. Знаки $\ominus$ возле его подмножеств означают, что в МВГ F_4 и F_5 не вычисляются.

Замечание. Для уменьшения перебора вдвое в МВГ можно отслеживать рассмотрение симметричных относительно центра комбинаций, т. е. 1 2 3 4 5 и 5 4 3 2 1 дают симметричные размещения с одинаковым значением целевой функции. Это можно рассматривать как еще одно правило отсечения.

В работе для задачи минимизации взвешенной длины связующей сети при линейном размещении прямоугольных элементов предложено и реализовано МВГ. При этом предложено правило ветвления допустимого множества на подмножества, а так же предложена и обоснована оценка допустимого подмножества. В дальнейшем интересно было б установить условия, при которых первое допустимое решение является решением задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: ІСДО, 1993. – 188 с.

2. Емец О.А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ / О.А. Емец, Т.А. Парфенова // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – №6. – С. 106- 112.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ПРОВЕРКИ И ГЕНЕРАЦИИ ГИПОТЕЗ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

Захожий А.С., lyoha1580@yandex.ru, Воблый В.А., vitvobl@yandex.ru

Москва МГТУ им. Н.Э. Баумана

Важной составной частью исследований в области теории графов является проверка и генерация гипотез. Проверка гипотез часто связана с большим количеством рутинных операций, которые можно легко автоматизировать с помощью компьютера. Более того, автоматизировать можно и вторую, «творческую» составляющую исследовательской деятельности – генерацию гипотез. За рубежом более 30 лет ведутся работы