УДК 519.85

РУХ В ІНТЕРВАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

Л. Г.Євсеєва, *к.ф.-м.н.,доцент,*
***Ю. Ю. Глушко**, викладач,*
Полтавське вище міжрегіональне професійне училище
yevseeva@gmail.com

В статті введено поняття інтервального руху, досліджено його властивості, що надає можливість визначити методологію побудови інтервальних математичних моделей оптимізаційних задач геометричного проектування, в яких об’єкти можуть не тільки транслюватись, але й повертатись навколо свого полюса.

Yevseeva L. G. The movement in Interval Space This article introduced the concept of interval movement, studied its properties, which provides the methodology to build mathematical models interval optimization problems of geometric design, in which objects can not only broadcasted, but back around his pole.

Ключові слова: ОПТИМІЗАЦІЯ, РОЗМІЩЕННЯ, ІНТЕРВАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ, ПОВОРОТИ.
Keywords: OPTIMIZATION, ARRANGEMENTS, INTERVAL GEOMETRY, TURN.

При вирішенні інженерних задач виникає проблема урахування допусків, тобто різниці між найбільшими і найменшими допустимими значеннями параметра, які задають на геометричні, механічні, фізико-хімічні та інші параметри деталей машин і механізмів.

При оперуванні кутовими величинами маємо допуски у вигляді

$$\theta \pm \nu_{\theta_0},\ [\theta - \nu_{\theta_0}, \theta + \nu_{\theta_0}], \tag{1}$$

де $0 \le \theta \le 2\pi$, $\nu_\theta \in R^1$.

В класі оптимізаційних задач розміщення, пов'язаних з математичним моделюванням процесу розміщення реальних об'єктів і створенням ефективних методів оптимізації цього процесу, найменш вивченими є задачі, в яких допускаються афінні перетворення не тільки трансляції, але й поворота об’єктів, що розміщуються [1].

З метою здійснення єдиного підходу до вирішення проблеми урахування похибок на лінійні та кутові розміри об’єктів при розв’язанні оптимізаційних задач розміщення [1], в 1992 році на основі двох наукових напрямків, що паралельно розвиваються, — геометричного проектування й інтервального аналізу [2], Ю. Г. Стояном закладено основи нового наукового напряму — інтервальної геометрії [3-4].

Розглянемо оптимізаційну задачу розміщення в такій постановці.

Маємо скінчену множину многокутників $P_k \subset R^2$, $J_n = \{1,2,...,n\}$, смугу $P_0 \subset R^2$ і $P_0^* = (R^2 \setminus cl\,P_0) \bigcup fr\,P_0$, замикання її доповнення до R^2, геометрична інформація [2] про які має вид

$$g_{P_k} = (P_k, ((\alpha_1^k \pm \nu_{\alpha_1^k}, \beta_1^k \pm \nu_{\beta_1^k}), ..., (\alpha_{m_k}^k \pm \nu_{\alpha_{m_k}^k}, \beta_{m_k}^k \pm \nu_{\beta_{m_k}^k})), (x_k \pm \nu_{x_k}, y_k \pm \nu_{y_k}), (\theta_k \pm \nu_{\theta_k}))$$

$$g_{P_0} = (P_0, (l \pm \nu_l, w \pm \nu_w), (x_0 \pm \nu_{x_0}, y_0 \pm \nu_{y_0}), (\theta_0 \pm \nu_{\theta_0})), \tag{2}$$

$$g_{P_0^*} = (P, (l \pm \nu_l, w \pm \nu_w), (x_0 \pm \nu_{x_0}, y_0 \pm \nu_{y_0}), (\theta_0 \pm \nu_{\theta_0})),$$

де $V_j^k(\alpha_j^k \pm \nu_{\alpha_j^k}, \beta_j^k \pm \nu_{\beta_j^k})$, $j \in J_{m_k}$, $j \in J_{m_k}$ – j-я вершина многокутника P_k у власній системі координат, $\theta_k \pm \nu_{\theta_k}$ – кут повороту P_k навколо власного полюсу, причому $\alpha_j^k \in R^1, \nu_{\alpha_j^k} \in R^+$, $\beta_j^k \in R^1, \nu_{\beta_j^k} \in R^+$, $k \in J_n$, $0 \le \theta_k \le 2\pi, \nu_{\theta_k} \in R^+$.

Нехай в рамках даного дослідження при розміщенні $P_k, k \in J_n$, допускається його трансляція на вектор $(x_k \pm \nu_{x_k}, y_k \pm \nu_{y_k})$ і поворот навколо полюса на кут $\theta_k \pm \nu_{\theta_k}$ при умові $0 \le \theta < 2\pi$

$$\begin{aligned} x_k' &= (x_k \pm \nu_{x_k}) \cdot \cos(\theta_k \pm \nu_{\theta_k}) - (y_k \pm \nu_{y_k}) \cdot \sin(\theta_k \pm \nu_{\theta_k}) + (x_k \pm \nu_{x_k}) \\ y_k' &= (x_k \pm \nu_{x_k}) \cdot \sin(\theta_k \pm \nu_{\theta_k}) + (y_k \pm \nu_{y_k}) \cdot \cos(\theta_k \pm \nu_{\theta_k}) + (y_k \pm \nu_{y_k}) \end{aligned} \tag{3}$$

Таким чином, положення об’єкта P_k характеризується вектором параметрів розміщення

$$u_k = (x_k \pm \nu_{x_k}, y_k \pm \nu_{y_k}, \theta_k \pm \nu_{\theta_k}) \in R^3,\ k \in \{0\} \bigcup J_n . \tag{4}$$

Задання метричних характеристик об'єктів у вигляді (2), а параметрів розміщення у вигляді (3)-(4) дозволяє створити пари чисел виду $(\alpha, \nu_\alpha) \in R^2$, де $\nu_\alpha \in R^1$ – похибка задання величини $\alpha \in R^1$. Тоді α можна представити двома числами – оцінкою знизу і оцінкою зверху, які утворюють інтервальне число $\langle \alpha, \nu_\alpha \rangle = \langle \mathrm{A} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, де $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – розширений простір центрованих інтервалів [2, 3]:

$$\mathbf{I}_s\mathbf{R} = \{\langle x, \nu_x \rangle \mid x = \frac{c+d}{2}, \nu_x = \frac{d-c}{2}, \forall c, d \in R^1\} .$$

Проведені автором дослідження ставили за мету здійснити подальший розвиток теорії інтервальної геометрії та теорії геометричного проектування щодо розробки конструктивних засобів математичного моделювання оптимізаційних задач розміщення в інтервальних просторах на основі принципово нового підходу до математичного моделювання і розв'язання оптимізаційних задач геометричного проектування.

У просторі $\mathbf{IR}$ введені такі операції над $\langle \Theta \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$: додавання, віднімання $\langle \Theta_1 \rangle \pm \langle \Theta_2 \rangle = \langle \theta_1 \pm \theta_2, \nu_{\theta_1} + \nu_{\theta_2} \rangle$, $\langle \Theta_i \rangle = \langle \theta_i, \nu_{\theta_i} \rangle, i = 1,2$, множення $\langle \Theta \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ на число $\lambda \in R^1$, $\lambda \cdot \langle \Theta \rangle = \langle \lambda \cdot \theta, |\lambda| \cdot \nu_\theta \rangle$, інтервального множення $\langle \Theta \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ на інтервальне число $\langle A \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$: $\langle A \rangle * \langle \Theta \rangle$ згідно означення інтервального множення в $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [2].

Тоді за математичні моделі геометричних об'єктів з урахуванням похибок початкових даних візьмемо інтервальні геометричні об'єкти відповідного інтервального простору.

Нехай $\mathbf{g_T} = (\Upsilon, M, (\langle U \rangle, \langle \Theta \rangle))$ – кортеж геометричної інформації, що індукує однозначно довільний інтервальний об'єкт $\mathbf{T} \in \Re$ у просторі $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, де $\Upsilon, M, (\langle U \rangle, \langle \Theta \rangle)$ – відповідно просторова форма, метричні характеристики і параметри розміщення об'єкту. Для орієнтованого інтервального об'єкта $\mathbf{T}$ маємо $\mathbf{g_T} = (\Upsilon, M, (\langle U \rangle, \langle 0, \nu_\Theta \rangle))$ у відповідності до концепції геометричної інформації.

Так, кортеж геометричної інформації інтервального m-кутника $\mathbf{K} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ має вигляд $\mathbf{g_K} = \{\mathbf{K}, (\langle V_1 \rangle, ..., \langle V_m \rangle), ((\langle X_0 \rangle, \langle Y_0 \rangle), \langle \Theta_0 \rangle)\}$, де $\langle V_i \rangle = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle)$ – його i-та вершина у власній інтервальній системі координат, $\langle \Theta_0 \rangle = (\langle \theta_0, \nu_{\theta_0} \rangle) \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – інтервальний кут повороту навколо власного полюса.

Означення 1. Інтервальний рух інтервального об'єкта $\mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ полягає в тому, що кожній точці $\langle U \rangle = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle) \in \mathbf{T}$ ставиться у відповідність точка $\langle U' \rangle = (\langle X' \rangle, \langle Y' \rangle) \in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ як результат елементарного інтервального відображення

$$\begin{cases} \langle X' \rangle = \langle X \rangle * \cos\langle \Theta \rangle - \overline{\langle Y \rangle * \sin\langle \Theta \rangle} + \langle X_0 \rangle \\ \langle Y' \rangle = \langle X \rangle * \sin\langle \Theta \rangle + \langle Y \rangle * \cos\langle \Theta \rangle + \langle Y_0 \rangle \end{cases} \tag{5}$$

де $\langle U_0 \rangle = (\langle X_0 \rangle, \langle Y_0 \rangle) \in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$, $\langle \Theta \rangle = \langle \theta, \nu_\theta \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – інтервальний кут, $\theta \in R^1$, $\nu_\theta \in R^+$.

Означення 2. Інтервальне обертання інтервального об'єкту $\mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ навколо свого полюса на інтервальний кут $\langle \Theta \rangle = \langle \theta, \nu_\theta \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ в $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ полягає в тому, що кожній точці $\langle U \rangle = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle) \in \mathbf{T}$ ставиться у відповідність деяка точка $\langle U'' \rangle = (\langle X'' \rangle, \langle Y'' \rangle) \in \mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ як результат елементарного інтервального відображення

$$\begin{aligned} &\langle X'' \rangle = \langle X \rangle * \cos\langle \Theta \rangle - \overline{\langle Y \rangle * \sin\langle \Theta \rangle} \\ &\langle Y'' \rangle = \langle X \rangle * \sin\langle \Theta \rangle + \langle Y \rangle * \cos\langle \Theta \rangle,\ \theta \in R^1, \nu_\theta \in R^+. \end{aligned} \tag{6}$$

Означення 3. Якщо в кортежі геометричної інформації про об'єкт $\mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ параметр $\langle \Theta \rangle = \langle \theta, \nu_\theta \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ є інтервальною константою, $\mathbf{T}$ назвемо інтервально орієнтованим інтервальним об'єктом. Тоді рух об'єкта $\mathbf{T}$ полягає тільки в трансляції на інтервальну направлену множину $\langle U_0 \rangle = (\langle X_0 \rangle, \langle Y_0 \rangle)$, а саме $\langle X' \rangle = \langle X \rangle - \overline{\langle X_0 \rangle}$, $\langle Y' \rangle = \langle Y \rangle - \overline{\langle Y_0 \rangle}$, $\langle \theta, \nu_\theta \rangle = \mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

Зауважимо, якщо у співвідношеннях (5) – (6) похибки кутів поворотів дорівнюють нулю, поняття інтервального руху збігається з поняттям руху інтервального геометричного об'єкту, введеному в інтервальному двовимірному просторі [3], а якщо , якщо у (5) – (6) усі похибки дорівнюють нулю, поняття інтервального руху збігається з відомим поняттям руху геометричного об'єкту в двовимірному евклідовому просторі.

Виходячи з основних положень теорії геометричного проектування та інтервальної геометрії, а також сформульованих задач дослідження, обрана така інтервальна математична модель інтервальної оптимізаційної задачі розміщення в геометричному проектуванні:

$$\inf_{\langle U\rangle\in\mathbf{D}\subseteq\mathbf{I}_s^q\mathbf{R}} \mathbf{F}(\langle U\rangle,\langle\Theta\rangle)$$

$$((\langle U\rangle,\langle\Theta\rangle),\langle H\rangle)=((\langle U_1\rangle,\langle\Theta_1\rangle),\ldots,(\langle U_n\rangle,\langle\Theta_i\rangle),\langle L\rangle)\in\mathbf{D}\subseteq\mathbf{I}_s^{6n+1}\mathbf{R},$$

де $\mathbf{F}:\mathbf{I}_s^{6n+1}\mathbf{R}\to\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – інтервальне відображення, $\mathbf{D}$ – інтервальна область допустимих розв'язків задачі, $\mathbf{I}_s^{q\cdot n+1}\mathbf{R}$ – $(q\cdot n+1)$- вимірний інтервальний простір.

Розглянемо тривимірний інтервальний простір

$$\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}=\ \mathbf{I}_s\mathbf{R}\times\mathbf{I}_s\mathbf{R}\times\mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

де $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – розширений простір центрованих інтервалів, $U=(\langle X\rangle,\langle Y\rangle,\langle Z\rangle)\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\langle X\rangle=\langle x,v_x\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle Y\rangle=\langle y,v_y\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle Z\rangle=\langle z,v_z\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

В даному інтервальному просторі при вирішенні оптимізаційної задачі розміщенні інтервальних геометричних об'єктів використовується поворот об'єктів на інтервальні кути $\langle\Theta_1\rangle,\langle\Theta_2\rangle,\langle\Theta_3\rangle$ з інтервальними осями координат відповідно.

Визначимо інтервальне обертання в $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ як дію, яка полягає в тому, що кожній точці $U=(\langle X\rangle,\langle Y\rangle,\langle Z\rangle)\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ ставиться у відповідність точка $U'=(\langle X'\rangle,\langle Y'\rangle,\langle Z'\rangle)\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ як результат інтервального відображення виду

$$\langle X\rangle=\langle L_1\rangle*\langle X'\rangle)+\langle L_2\rangle*\langle Y'\rangle+\langle L_3\rangle*\langle Z'\rangle,$$
$$\langle Y\rangle=\langle M_1\rangle*\langle X'\rangle)+\langle M_2\rangle*\langle Y'\rangle)+\langle M_3\rangle*\langle Z'\rangle,$$
$$\langle Z\rangle=\langle N_1\rangle*\langle X'\rangle)+\langle N_2\rangle*\langle Y'\rangle+\langle N_3\rangle*\langle Z'\rangle,$$

$$\langle L_1\rangle=\cos\langle\Theta_1^k\rangle*\cos\langle\Theta_3^k\rangle-\sin\langle\Theta_1^k\rangle*\cos\langle\Theta_2^k\rangle*\sin\langle\Theta_3^k\rangle,$$
$$\langle M_1\rangle=\sin\langle\Theta_1^k\rangle*\cos\langle\Theta_3^k\rangle+\cos\langle\Theta_1^k\rangle*\cos\langle\Theta_2^k\rangle*\sin\langle\Theta_3^k\rangle,$$
$$\langle N_1\rangle=\cos\langle\Theta_2^k\rangle*\sin\langle\Theta_3^k\rangle,$$

$$\langle L_2\rangle=-\overline{\cos\langle\Theta_1^k\rangle*\cos\langle\Theta_3^k\rangle}-\overline{\sin\langle\Theta_1^k\rangle*\cos\langle\Theta_2^k\rangle*\cos\langle\Theta_3^k\rangle},$$
$$\langle M_2\rangle=-\overline{\sin\langle\Theta_1^k\rangle*\cos\langle\Theta_3^k\rangle}+\cos\langle\Theta_1^k\rangle*\cos\langle\Theta_2^k\rangle*\cos\langle\Theta_3^k\rangle,$$
$$\langle N_2\rangle=\sin\langle\Theta_2^k\rangle*\cos\langle\Theta_3^k\rangle,\quad \langle L_3\rangle=\sin\langle\Theta_1^k\rangle*\sin\langle\Theta_2^k\rangle,$$
$$\langle M_3\rangle=-\overline{\cos\langle\Theta_1^k\rangle*\sin\langle\Theta_2^k\rangle},\quad \langle N_3\rangle=\cos\langle\Theta_2^k\rangle.$$

Аксіоми руху евклідова простору виконуються в інтервальних просторах, що дозволяє використовувати їх при моделюванні і розв’язанні оптимізаційних задач розміщення з урахуванням похибок початкових даних.

Як приклад, подамо такі аксіоми.

Аксіома 1. Кожний інтервальний рух зберігає відношення належності**.**

Аксіома 2. Кожний інтервальний рух зберігає відношення порядку на інтервальній прямій.

Аксіома 3. Для кожної пари точок $(\langle X_1\rangle,\langle Y_1\rangle,\langle Z_1\rangle)\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ та $(\langle X_2\rangle,\langle Y_2\rangle,\langle Z_2\rangle)\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ існує інтервальний рух, який переставляє їх місцями.

Введено поняття інтервального руху, досліджено його властивості. Результати дослідження дозволяють визначити методологію побудови інтервальних математичних моделей оптимізаційних задач геометричного проектування, в яких об’єкти можуть не тільки транслюватись, але й повертатись навколо свого полюса.

Литература

1. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. — Киев: Наукова думка, 1986. — 268 с.
2. Koucher E. Interval Analysis in the Extended Interval Space **IR**// Comp. Suppl. – 1980.-№ 2- P. 33-49.
3. Стоян Ю. Г. Метрическое пространство центрированных интервалов// Доклады НАН Украины, А. –1996. –№7–с.23-25.