УДК 519.85

РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.И. Косолап *д.ф.-м.н., професор*
Украинский государственный химико-технологический университет
anivkos@ua.fm

В работе рассматриваются общие задачи квадратичной оптимизации в которых необходимо найти точку глобального экстремума. Показано что методом точной квадратичной регуляризации такие задачи преобразуются к максимизации нормы вектора на пересечении шаров. Для решения преобразованной задачи используется двойственный метод.

Kosolap A.I. Solving of the general quadratic optimization problems. In paper we consider the problems of general quadratic optimization in which it is necessary to find a point of a global extremum. Such problems we transform to maximization of norm of a vector on intersection of spheres with help of exact quadratic regularization. For the solution of the transformed problem we use the dual method.

Ключевые слова: ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, ТОЧНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ, ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД.
Keywords: GLOBAL OPTIMIZATION, EXACT QUADRATIC REGULARIZATION, DUAL METHOD.

Математические модели задач экономики, финансов, управления проектами и технологическими процессами, конструирования, как правило, формулируются в виде задач квадратичной оптимизации. Такие задачи являются сложными для численного решения, так как могут содержать много локальных экстремумов. Для нахождения глобального экстремума в этих задачах используются методы ветвей и границ [1], внешних аппроксимаций [2], полуопределенная релаксация [3], двойственные методы [4], методы случайного поиска [5] и др. Однако эти методы могут находить решения только для задач малой размерности либо позволяют находить приближенные решения, которые часто далеки от точек глобального экстремума. В настоящей работе для решения общих квадратичных задач используется метод точной квадратичной регуляризации, который позволяет преобразовать эти задачи к максимизации нормы вектора на пересечении шаров. Для решения полученной задачи используется двойственный метод, который преобразует многоэкстремальную задачу к одноэкстремальной. Решение двойственной задачи позволяет определить решение исходной задачи квадратичной оптимизации.

Постановка задачи. Рассмотрим общую задачу квадратичной оптимизации

$$\min\{x^T A_0 x + b_0^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x + c_i \le 0, i = 1,\dots,m, x \in E^n\}, \quad (1)$$

где все матрицы A_i – симметричные, b_i, x – n-мерные векторы евклидового пространства E^n, c_i – числа. Будем предполагать, что задача (1) имеет решение. Используем точную квадратичную регуляризацию [6] для преобразования задачи (1) к виду

$$\begin{aligned}\max\{\| z \|^2 \mid\ & x^T A_0 x + b_0^T x + s + (r-1)\| z \|^2 \le d, \\ & x^T A_i x + b_i^T x + c_i + r\| z \|^2 \le d, i = 1,\dots,m\}\end{aligned}, \quad (2)$$

где вектор $z = (x, x_{n+1})$, параметр s удовлетворяет условию

$$s \ge \| x^* \|^2 - x^{*T} A_0 x^* - b_0^T x^*,$$

где x^* - решение задачи (1), а параметр $r > 0$ выбирается таким, чтобы матрицы $A_0 + (r-1)I$, $A_i + rI$, i=1,…,m были положительно определенные, где I – единичная матрица. Для этого достаточно найти минимальное значение r, удовлетворяющее условиям

$$a_{jj}^{i} + r > \sum_{\forall k \neq j} a_{jk}^{i} + 1, \forall i, j\,, \qquad (3)$$

где a_{jk}^{i} - элементы матрицы A_i. При выполнении условий (3), допустимое множество задачи (2) будет выпуклым.

В задаче (2) необходимо найти минимальное значение переменной $d = d_{\min}$ при котором ее решение z^* удовлетворяет условию $r\|z^*\|^2 = d_{\min}$. Такое значение $d_{\min}$ будем находить методом дихотомии. Решим задачу выпуклой оптимизации

$$\max\{d \mid x^T A_0 x + b_0^T x + s + (r-1)\|z\|^2 \le d,$$
$$x^T A_i x + b_i^T x + c_i + r\|z\|^2 \le d, i = 1,...,m, r\|z\|^2 \le d\}.$$

Если для ее решения (z^0, d_0) выполняется условие $r\|z^0\|^2 = d_0$, то задача (1) решена и ее решение $x^* = (x_0, 0)$ [6]. В противном случае, если $r\|z^0\|^2 < d_0$, будем увеличивать значение переменной $d = d_0 + h$ ($h > 0$) и для каждого такого значения d , решать задачу (2). При увеличении d значение $r\|z\|^2 - d$ будет монотонно возрастать. Поэтому методом дихотомии легко найти значение d, для которого будет выполняться равенство $r\|z\|^2 = d$. Если найденное значение d минимальное, то задача (1) решена. В противном случае, найдена только точка локального максимума задачи (2). Таким образом, для нахождения минимального значения d необходимо находить точку глобального максимума в задаче (2). Для этого воспользуемся двойственным методом. Сначала преобразуем квадратичные функции задачи (1) к каноническому виду. Тогда задача (1) примет вид

$$\min\{\sum_{j=1}^{n} c_j^0 (x_j - a_j^0)^2 \mid \sum_{j=1}^{n} c_j^i (x_j - a_j^i)^2 \le r_i^2, i = 1,...,m, Px = q\},$$

где $c_j^i = (-\varepsilon, 0, \varepsilon)$ равны одному из значений в скобках. Используя точную квадратичную регуляризацию, приходим к задаче

$$\max\{\| x\|^2 \,|\, \| x - a^i \|^2 \le r_i^2, i = 1,\ldots, m\}. \qquad (4)$$

Для этой задачи двойственная функция равна

$$g(\lambda) = \frac{\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i \|^2}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\| a^i \|^2 - r_i^2),$$

а двойственная задача

$$\min\left\{ g(\lambda) \,\middle|\, \left\| \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 1} - a^i \right\|^2 \le r_i^2 i = 1,\ldots, m, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 1 \ge 0, \lambda \ge 0 \right\}. \qquad (5)$$

Задача (5) - одноэкстремальная и легко решается прямо-двойственным методом внутренней точки [7].

Пример. Решим задачу (4) для n = 2 и m = 5, значения a^i и r_i^2 приведены в табл. 1. В задаче (4) четыре локальных максимума. Решение задачи (5) λ = (0; 0,009127; 0,180158; 0,792853; 0.017872). После подстановки этих значений в формулу $x(\lambda)$, определим точку глобального максимума x^* = (–1,4946337; 2,9538614) задачи (4). Разрыв двойственности в этой задаче больше нуля $\|x(\lambda)\|^2$ = 10.9592, $g(\lambda)$ = 11.69398. Активным в точке x^* будет третье и четвертое ограничение. Решим для этих ограничений линейную систему уравнений

$$x^* - \sum \lambda (x^* - a^i) = 0,$$

получим оптимальные множители Лагранжа $\lambda^* = (0;\ 0;\ 0{,}183541;\ 0{,}79583;\ 0)$. Для этих множителей разрыв двойственности будет равен нулю $g(\lambda^*) = \|\ x^*\|^2 = 10.9592$.

Таблица 1.

Исходные данные для примера

a^1	a^2	r^2
4	3	40
–2	2	35
–2	–2.5	30
0,5	0,5	10
–1	2	25

Если в двойственной задаче (5) не учитывать ограничений прямой задачи (так делается во всех двойственных методах), то получим более точную оценку $g(\lambda) = 11.68853$, но после вычисления $x(\lambda)$ получим $\|x(\lambda)\|^2 = 13.08578$, причем точка $x(\lambda)$ будет недопустимой для ограничений прямой задачи. Таким образом, традиционное решение двойственной задачи позволяет получить только верхнюю оценку целевой функции прямой задачи, но не несет никакой информации о точке глобального максимума задачи (1). Поэтому использование точной квадратичной регуляризации является существенным, так как ограничения прямой задачи будут выпуклыми для двойственной задачи.

Выводы. В работе общая квадратичная задача преобразована с помощью точной квадратичной регуляризации к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Для решения последней задачи используется модификация двойственного метода, позволяющая получить точное решение исходной задачи.

Литература

1. Horst R. Global Optimization: Deterministic Approaches /R. Horst, H. Tuy. – 3rd ed., Berlin: Springer–Verlag, 1996. – 727 p.
2. Essays and surveys in Global optimization /Ed. by C. Audet, P. Hansen, G. Savard. – Springer Science+Business Media, Inc. – 2005. – 301 p.
3. Ye Y. Semidefinite programming /Y. Ye. – Stanford University, 2003. – 161 p.
4. Шор Н.З. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация / Н.З. Шор, С.И. Стеценко. – К.: Наук. думка, 1989. – 205 с.
5. Kenneth V.P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization/ V.P. Kenneth, R.M. Storn, J.A. Lampinen. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.
6. Косолап, А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А. И. Косолап – Днепропетровск: ПГАСА, 2015 – 164 с.
7. Nocedal J., Wright S. J. Numerical optimization. Springer, 2006. 685 p.