УДК 519.16

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ВЗВЕШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ В ГРАФЕ

А. В. Морозов*, к. т. н., доцент*
Житомирский государственный технологический университет
morozov.andriy@gmail.com
А. В. Панишев*, д.т.н., профессор*
Житомирский государственный технологический университет
pzs.ztu@gmail.com

В статье предлагается решение известной задачи о взвешенном паросочетании в произвольном графе H с n вершинами, путем сведения к одной из задач о паросочетании для двудольного графа с 2n вершинами.

Pansichev A. V., Morozov A. V. polynomial algorithm for finding the weighted matchings in a graph. A well-known problem of the weighted matching in an arbitrary graph H with n vertices is reduced to one of the problems of the matching for a bipartite graph c 2n vertices.

Ключевые слова: ЗАДАЧА О ПАРОСОЧЕТАНИИ, ВЗВЕШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ, ДВУДОЛЬНЫЙ ГРАФ.
Keywords: THE PROBLEM OF MATCHING, WEIGHTED MATCHING, BIPARTITE GRAPH.

Пусть $H=(V,U)$ – граф, где V – множество вершин, U – множество ребер (неориентированных пар вершин). В H недопустимы петли и кратные или “параллельные” ребра.

Задача о паросочетании состоит в нахождении в заданном графе $H=(V,U)$ паросочетания с наибольшим числом ребер (максимального паросочетания). В обобщении этой задачи заданы веса ребер – неотрицательные числа, и требуется определить максимальное паросочетание графа, содержащее ребра с минимальным (максимальным) суммарным весом.

Сформулированное обобщение называется задачей о взвешенном паросочетании (ЗВП).

В условии рассматриваемой здесь ЗВП задан граф $H=(V,U),\ |V|\in n,$ в котором каждое ребро $\{i,j\}\in U$ имеет вес $c_{ij}\in R_0^+,\quad i,j=\overline{1,\ n},\quad R_0^+$ − множество неотрицательных действительных чисел. Требуется найти в графе *H* максимальное паросочетание с минимальной суммой весов ребер.

Графу ЗВП $H=(V,U)$ соответствует симметричная матрица стоимостей (весов) ребер $C=\left[c_{ij}\right]_n$, где $c_{ij}\in R_0^+$, если $\{i,j\}\in U$ и $c_{ij}=\infty$ иначе. Эта же матрица определяет двудольный граф $D=(X,Y,E)$, где *X*, *Y* – множество вершин, $|X|=|Y|=|Y|=n,$ $E=\{(i,j)\,|\,i\in X,\ j\in Y\},$ − множество ребер с весами $c_{ij}\in R_0^+,\ |E|=2|V|.$ Отсюда следует, что для решения поставленной задачи применимы идеи поиска в ширину в двудольных графах [1]. Ребро паросочетания *M*, связывающее вершины *v* и *u*, обозначим $[v,u]$.

Если $\left(v_1,\ v_2,\ v_3,\ ...,\ v_{2k-2},\ v_{2k-1},\ v_{2k}\right)$ – увеличивающий путь относительно паросочетания *M* в графе *H*, то *P* = $=\left(i_1,\ j_2,\ i_3,\ ...,\ j_{2k-2},\ i_{2k-1},\ j_{2k}\right)$ − увеличивающий путь в двудольном графе $D=(X,Y,E)$ относительно паросочетания той же мощности, что и *M*.

Процедура нахождения увеличивающего пути относительно текущего паросочетания базируется на следующем известном факте: если *P* – множество ребер увеличивающего пути относительно паросочетания *M* в графе *H*, то $M\oplus P$ – паросочетание мощности $|M|+1$.

Допустимое решение ЗВП – это максимальное паросочетание взвешенного графа *H*. Поиск максимального паросочетания в *H* каким-либо методом завершается при выполнении условия теоремы, в следующей формулировке. Паросочетание *M* в графе *H* максимально тогда и только тогда, когда в *H* не существует увеличивающего пути относительно *M* [1].

Решением ЗВП является максимальное паросочетание M_{opt} минимальной стоимости в графе *H*.

Пусть $M_{k-1} = \{[i_1, j_2],[i_3, j_4],\ldots,[i_{2k-3}, j_{2k-2}]\}$ – паросочетание с наименьшей суммой $C(M_{k-1})$ весов $k-1$ ребер на множестве всех паросочетаний мощности $k-1$ в двудольном графе *D*, $k \geq 2$. В графе *H* ему взаимно однозначно соответствует паросочетание $\{[v_1,v_2],\ [v_3,v_4],\ \ldots,\ [v_{2k-3},v_{2k-2}]\}$. Положим $M_{k-1} = \{[i_1, j[i_1]],[i_2, j[i_2]],\ \ldots,\ [i_l, j[i_l]],\ \ldots,\ [i_{k-1}, j[i_{k-1}]]\}$, $i_l \neq$ $\neq j[i_l]$, где i_l – номер вершины множества *X*, $j[i_l]$ − номер вершины множества *Y*. В M_{k-1} все $2k-2$ вершин пронумерованы различными числами множества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Обозначим $M_k^1 = M_{k-1} \cup \{[i_k, j[i_k]]\}$ – паросочетание, содержащее ребро $[i_k, j[i_k]]$ с наименьшим весом среди всех ребер, которые можно присоединить к M_{k-1}, P_k − кратчайший увеличивающий путь относительно паросочетания M_{k-1}, $M_k^2 = M_{k-1} \oplus P_k$, $C(M_k^1)$ и $C(M_k^2)$ − стоимости паросочетаний M_k^1 и M_k^2.

Лемма. Если $C(M_k^2) \leq C(M_k^1)$, то $C(M_k) = C(M_k^2)$, иначе $C(M_k) = C(M_k^1)$, M_k − паросочетание с минимальной суммой весов *k* ребер в графе *D*.

Очевидно, для некоторого *k* паросочетание M_k максимально. Тогда $M_{opt} = M_k$ в графе $H = (V,U)$. Предлагаемый подход к решению ЗВП состоит в пошаговом нахождении в графе *H* паросочетаний M_k, $k = \overline{1, M_{opt}}$, в результате построения в двудольном графе *D* каждого кратчайшего увеличивающего пути P_k относительно M_k, нахождения паросочетаний M_{k+1}^1 и

$M_{k+1}^2 = M_k \oplus P_k$ и выбора из них M_{k+1}.

Предлагаемый подход сформулирован в виде алгоритма с впеменной сложностью $O\left(n^3\right)$.

Литература

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К.: Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.