УДК 519.6

ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ 3D ОБ'ЄКТА ЗА ВІДОМИМИ ТОМОГРАМАМИ НА СИСТЕМІ ДОВІЛЬНИХ ПЛОЩИН

Ю. І. Першина, *д.ф.-м.н., доцент*
Українська інженерно-педагогічна академія
yulia_pershina@mail.ru
О. В. Шилін, *аспірант*
Українська інженерно-педагогічна академія
sh.alex783@gmail.com

В статті розв'язується 3D задача комп'ютерної томографії за допомогою поліноміальної інтерфлетації за відомими томограмами, що лежать на системі довільних площин.

Pershyna I.I., Shilin O.V. Restoration of internal 3D objects by known tomograms on a system of arbitrary planes. In the article is solved the problem of 3D computed tomography by means polynomial interflatation by known tomograms lying on a system of arbitrary planes.

Ключові слова: ІНТЕРФЛЕТАЦІЯ, ТОМОГРАФІЯ, ВІДНОВЛЕННЯ.
Keywords: INTERFLATATION, TOMOGRAPHY, RESTORATION.

Побудуємо оператор, який дозволить відновити просторово змінний коефіцієнт поглинання $f(x),\ x \in R^3$ всередині 3D тіла за відомими його зображеннями (томограмами) $T_k(\bar{x})$) на системі будь – яких N перерізаних площин, які задаються наступними рівняннями

$$\Pi_k : \omega_k(x) =: \sum_{p=1}^{3} a_{kp} x_p - \gamma_k = 0\,,\ k = \overline{1,N}\quad \sqrt{\sum_{p=1}^{3} a_{kp}^2} = 1,$$

Вважаємо, що в одній точці перетинається на більше трьох площини. Введемо наступні позначення:

1. $\tau_{ik} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}$ – вектор, направлений вздовж лінії перетину площин $\omega_i = 0,\ \omega_k = 0$;

2. $M = \{(i,k,l) \,|\, \Pi_i \cap \Pi_k \cap \Pi_l = V_{ikl} = (x_{ikl1}, x_{ikl2}, x_{ikl3}) \neq \emptyset,\ i \neq k \neq l\}$, де V_{ikl} – точка перетину трьох площин; M - множина точок перетину;

3. $\Gamma_{ik} = \Pi_i \cap \Pi_k \neq \emptyset,$ – ребра, за якими перетинаються дві площини, на яких лежать відповідні томограми;

4. $\Delta_{ikl} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \end{vmatrix}$;

5. $\mathrm{T}_k(\bar{x})$ – томограма, яка лежить на площині Π_k. Нехай томограми $\mathrm{T}_i(\bar{x}), \mathrm{T}_k(\bar{x}), \mathrm{T}_l(\bar{x})$ перетинаються в точці V_{ikl}. Позначимо

$$u_{li}^k(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}}\omega_l(x) + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}}\omega_i(x),\ \ w_i(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}}\omega_i(x).$$

Теорема 1. Оператор $L_{ikl}(x) \in C(R^3)$ вигляду

$$L_{ikl}(x) = [L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^k - L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k](x),$$
$$L_{ik}^l(x) = T_l(u_{ik}^l(x)),\ L_{ik}^l L_{kl}^i(x) = T_l(w_k(x)),$$
$$L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(x) = T_k(\bar{x})\Big|_{\omega_i(x)=0,\ \omega_l(x)=0}.$$

є опертором інтерфлетації функції трьох змінних, побудований на трьох площинах, тобто задовольняє умовам $T_k(\bar{x}) \in C^r(R^2),\ r \geq 0$ та умовам С. М. Нікольського, які на ребрі Γ_{kl} зводяться до перевірки рівностей

$$T_k(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega_l(x)=0} = T_l(u_{il}^l(x))\Big|_{\omega_k(x)=0},$$

тобто значення томограм, на лінії перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються. Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах Γ_{ik}, Γ_{li}.

Тоді для похибки наближеного відновлення внутрішньої структури $f(x)$ оператором $L_{ikl}(x)$, побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність

$$R_{ikl} f(x) = \int_0^{\omega 1_i} \int_0^{\omega 2_k} \int_0^{\omega 3_l} \frac{\partial^3}{\partial t_i \, \partial t_k \, \partial t_l} f\left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i \, dt_k \, dt_l$$

Теорема 2. Нехай томограми $T_k(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \ge 3$ задовольняють умовам С. М. Нікольського на ребрах і в точці перетину площин. Тоді функція $L(x) = \sum_{(i,k,l)\in M} h_{ikl}(x) L_{ikl}(x)$ є поліноміальним інтерфлетантом із властивостями $L(x) \in C^r(\Omega)$, $L(x)\big|_{\Pi_s} = T_s(\vec{x}),\ s = \overline{1,N}$. При цьому $\forall f(x) \in C^r(\Omega),\ r \ge 3$, що задовольняє умовам теореми 1, виконується рівність

$$f(x) = Lf(x) + R\, f(x), \quad R(x)\, f(x) = \sum_{(i,k,l)\in M} h_{ikl}(x) R_{ikl}\, f(x)\,,$$

де $h_{ikl}(x)$ – допоміжні поліноми.

Теорема 3. Абсолютна неусувна похибка E побудованого інтерфлетанта в припущені, що $f(x)$ на площинах Π_k, тобто відповідні томограми задані наближено δ_k, тобто $\left| T_k(\bar{x}) - \tilde{T}_k(\bar{x}) \right| \le \delta_k \ k = \overline{1,n}$, а також $\left| T_k(\bar{x})\big|_{\Pi_i} - T_k(\bar{x})\big|_{\Pi_i} \right| \le \delta_{ki}$, $\left| T_k(\bar{x})\big|_{\omega_i(x)=0,\omega_l(x)=0} - T_k(\bar{x})\big|_{\omega_i(x)=0,\omega_l(x)=0} \right| \le \delta_{kil}$,. дорівнює

$$E \le \sum_{(i,k,l)\in M} \delta_i + \delta_k + \delta_l + \delta_i\delta_k + \delta_i\delta_l + \delta_k\delta_l + \delta_i\delta_k\delta_l\,.$$

Література

1. Сергієнко І. В. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Монографія. – Харків, 2008. – 160 с.