Українська Федерація Інформатики
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН – 2016)

МАТЕРІАЛИ
VII Всеукраїнської науково-практичної
конференції за міжнародною участю

(м. Полтава, 10–12 березня 2016 року)

За редакцією професор О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2016

УДК 004+519.7
ББК 32.973я431
І-74

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

І-74 **Інформатика** та системні науки (ІСН – 2016) : матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 10–12 березня 2016 р.) / за редакцією О. О. Ємця. – Полтава : ПУЕТ, 2016. – 362 с.

ISBN 978-966-184-227-3

Збірник тез конференції містить сучасну проблематику в таких галузях інформатики та системних наук, як теоретичні основи інформатики та кібернетики, математичне моделювання та обчислювальні методи, математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем, системний аналіз і теорія оптимальних рішень. Представлено доповіді, що відображають проблеми сучасної підготовки фахівців з інформатики, прикладної математики, системного аналізу та комп'ютерних інформаційних технологій.

Розрахований на фахівців з кібернетики, інформатики, системних наук.

УДК 004+519.7
ББК 32.973я431

Матеріали друкуються в авторській редакції мовами оригіналів.
За виклад, зміст і достовірність матеріалів відповідають автори.

ISBN 978-966-184-227-3

УДК 519.8

НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАНЕЙ ОБЩЕГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА

О. А. Емец, *д. ф.-м. н., професор;*
А. О. Емец, *к. ф.-м. н., доцент;*
И. М. Поляков, *аспирант*
Высшее учебное заведение Укоопсоюза «Полтавский университет экономики и торговли»
yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

В докладе рассмотрено новая формулировка критерия грани перестановочного многогранника в случае, когда перестановки имеют повторения.

In the report the new formulation of the criterion of the facets of the permutation polyhedron when the permutation has repetitions are considered.

Ключевые слова: ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЙ МНОГОГРАННИК, КРИТЕРИЙ ГРАНИ, ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

Keywords: PERMUTATION POLYHEDRON, CRITERION OF A FACET, PERMUTATION WITH REPETITIONS.

Исследование полиэдральной структуры выпуклых оболочек комбинаторных множеств является актуальным направлением исследований в комбинаторной оптимизации (см., например, [1–16]).

Изучение граневой структуры перестановочных многогранников для разных множеств и мультимножеств, элементы которых переставлялись, рассматривалось в [2–6, 17–22]. При этом в [2, 17] и в [18] рассматривались только множества, причем в [18] – множество натуральных чисел.

Пусть задано мультимножество $G = \{g_1, \dots, g_k\}$, с основой $S(G) = (e_1, \dots, e_n)$, первичной спецификацией $[G] = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, считаем, что $e_1 > \dots > e_n$, $g_1 \ge \dots \ge g_k$.

Введем такие необходимые далее параметры:

$$k_0 = 0,\ \ k_1 = \eta_1, \dots, k_i = \eta_1 + \dots + \eta_i, \dots, k_n = \eta_1 + \dots + \eta_n = k.$$

Обозначим $J_k = \{1, 2, ..., k\}$.

Известна теорема (теорема 2.5 [4]), описывающая m-грани выпуклой оболочки всех перестановок элементов G – общего перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(G)$ в форме:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\omega} x_i \le \sum\limits_{i=1}^{|\omega|} g_i \ \forall \omega \subset J_k, |\omega| < k, & (1) \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} g_i, & (2) \end{cases}$$

В этой теореме (пункт б), в частности, утверждается следующее. Если для подмножеств $\omega_1 \subset ... \subset \omega_\lambda = J_k$ неравенства в системе (1), (2) заменить равенствами, то множество F решений полученной системы является m-гранью общего перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(G)$, а

$$m = dim F = k - \left\{\lambda + \sum\left(|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1\right)\right\}, \tag{3}$$

где суммирование в (3) происходит по всем $\sigma \in J_\lambda$, для каждого из которых найдется такое $j \in J_n$, что

$$k_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|, \ |\omega_\sigma| \le k_j,$$

при этом считаем, что $|\omega_0| = 0$.

В формулах (1)–(3) и далее $|A|$ обозначает количество элементов в множестве (мультимножества) A.

Часто используется другая форма общего перестановочного многогранника (ОПМ), которую приведем далее. Цель статьи – изложение результатов получения критерия m-грани для этой формы ОПМ.

Рассмотрим вместе с G равное ему переупорядоченное мультимножество $Q = G = \{q_1, ..., q_k\}$, где $q_1 = g_k$, $q_2 = g_{k-1}$, ..., $q_i = g_{k-i+1}$, ..., $q_{k-1} = g_2$, $q_k = g_1$, обозначим основу $S(Q) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_1 = e_n$, $\varepsilon_2 = e_{n-1}$, ..., $\varepsilon_i = e_{n-i+1}$, ..., $\varepsilon_n = e_1$, таким образом $q_1 \le ... \le q_k$, $\varepsilon_1 < ... < \varepsilon_n$. Первичная спецификация мультимножества Q – кортеж в соответствии с порядком основы $S(Q)$ – вектор $[Q]=(\nu_1,\ldots,\nu_i,\ldots,\nu_n)$, состоящий из кратностей элементов ε_i основы:

$$\nu_i = k_Q(\varepsilon_i) = \eta_{n-i+1} \quad \forall i \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{4}$$

где $k_Q(\varepsilon_i)$ означает кратность элемента основы ε_i в мультимножестве Q.

Как известно [3, 4, 19], многогранник перестановок $\Pi_{kn}(G)$ может быть описан так:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\Omega} x_i \ge \sum\limits_{i=1}^{|\Omega|} q_i \quad \forall\Omega\subset J_k, |\Omega|<k, & (5) \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i. & (6) \end{cases}$$

Рассмотрим вместе с системой (5) следующие неравенства:

$$\sum_{i\in W} x_i \ge \sum_{i=1}^{|W|} g_{k-i+1}, \ \forall W \subset J_k, |W|<k. \tag{7}$$

Понятно, что при $\Omega = W$ каждое неравенство в (5) одинаково с соответствующим неравенством в (7).

Заметим, что множество

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\omega} x_i \le \sum\limits_{i=1}^{|\omega|} g_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} g_i, \end{cases} \tag{8}$$

при фиксированном ω и $\Omega = J_k \setminus \omega$ совпадает с множеством

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\Omega} x_i \ge \sum\limits_{i=1}^{|\Omega|} q_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим множества $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_\lambda = J_k$ из приведенного выше пункта «б» теоремы 2.5 из [4]. Им соответствуют множества Ω_i со следующими свойствами:

$$\Omega_i = J_k \setminus \omega_i, \ \ \forall i \in J_\lambda^0 = \{0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1, \lambda\},$$

$$J_k = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_{\lambda-1} \supset \Omega_\lambda = \emptyset, \tag{10}$$

$$\omega_0 = \emptyset.$$

Очевидно,

$$|\Omega_i| = k - |\omega_i| \ \ \forall i \in J_\lambda^0. \tag{11}$$

Итак, система (1), (2) эквивалента системе (5), (6), а множество F, задаваемое подмножеством $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_\lambda = J_k$ из (1) равно, согласно (8) и (9), множеству, которое из (5) задается подмножествами Ω_i вида (10).

Рассмотрим формулу (3) определения размерности m-грани F, используя связь (4) между ν_i и η_i.

Имеем,

$$m = dim\, F = k - \left\{\lambda + \sum\left(k - |\Omega_\sigma| - \left(k - |\Omega_{\sigma-1}|\right) - 1\right)\right\} =$$

$$= k - \left\{\lambda + \sum\left(|\Omega_{\sigma-1}| - |\Omega_\sigma| - 1\right)\right\}. \tag{12}$$

Суммирование в (12) производят по всем $\sigma \in J_\lambda$, для каждого из которых найдется такое $j \in J_n$, что

$$k_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|; \quad |\omega_\sigma| \le k_j \tag{13}$$

с учетом $|\omega_0| = 0$.

Введем в рассмотрение параметры

$$\kappa_0 = 0; \ \ \kappa_1 = \nu_1 = \eta_n; \ \ \kappa_2 = \nu_1 + \nu_2 = \eta_n + \eta_{n-1}, \ldots,$$

$$\kappa_i = \nu_1 + \ldots + \nu_i = \eta_n + \ldots + \eta_{n-i+1}, \ldots,$$

$$\kappa_n = \nu_1 + \ldots + \nu_n = \eta_n + \ldots + \eta_1 = k. \tag{14}$$

Условия (13) с учетом (11) и (14), если учесть, что

$$k_i = \eta_1 + \ldots + \eta_i = k - \kappa_{n-i} \quad \forall i \in J_n^0, \tag{15}$$

записываются так:

$$k - \kappa_{n-j+1} \le k - |\Omega_{\sigma-1}|; \;\; k - |\Omega_\sigma| \le k - \kappa_{n-j},$$

или после упрощения

$$\kappa_{n-j} \le |\Omega_\sigma|, \; |\Omega_{\sigma-1}| \le \kappa_{n-j+1},$$

где $|\Omega_\lambda| = 0, \quad \sigma \in J_\lambda = \{1, 2, \ldots, \lambda - 1, \lambda\}; \quad j \in J_n$. Заметим, что, если $j \in J_n$, то при этом то же можно сказать и про параметр $t = n - j + 1$, т. е. $t \in J_n$.

Отметим, что в силу равенства множеств (8) и (9) получаем из части «а» теоремы 2.5 [4] такое: для m-грани F перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(Q)$ существуют такие подмножества $J_k = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \ldots \supset \Omega_{k-m-1}$, для которых неравенства в (5) обращаются в равенства при любом $x \in F$, где F – множество решений системы, которая получается из (5), (6) заменой неравенств на равенства для $\Omega = \Omega_\sigma$, $\forall \sigma \in J_{k-m-1}$. Заметим, что для ω_{k-m} из «а» в 2.5. [4] соответствующее множество есть пустым, т.е. $\Omega_{k-m} = \emptyset$ в силу (10).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть мультимножество $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ имеет основу $S(Q) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, первичную спецификацию $[Q] = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Элементы Q и $S(Q)$ пронумерованы так, что

$$q_1 \le \ldots \le q_k; \;\; \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_n.$$

а) Пусть F – m-грань многогранника $\Pi_{kn}(Q)$, который определяется системой (5), (6). Тогда существуют такие подмножества $\Omega_{k-m-1} \subset \Omega_{k-m-2} \subset \ldots \subset \Omega_1 \subset \Omega_0 = J_k$, для которых неравенства в (5) обращаются в равенства $\forall x \in F$, где F – множество решений системы, полученной из (5), (6) заменой в (5) знака неравенства на знак равенства $\forall \Omega = \Omega_\sigma$, $\sigma \in J_{k-m-1}$.

б) Если для подмножеств $\Omega \in \{\Omega_1, \ldots, \Omega_{\lambda-1}\}$, где $\emptyset = \Omega_\lambda \subset \Omega_{\lambda-1} \subset \ldots \subset \Omega_2 \subset \Omega_1 \subset \Omega_0 = J_k$, неравенства в (5), (6) заменить равенствами, то множество F решений полученной системы является m-гранью многогранника $\Pi_{kn}(Q)$, где

$$m = dim\, F = k - \left\{\lambda + \sum\left(|\Omega_{\sigma-1}| - |\Omega_\sigma| - 1\right)\right\}, \tag{16}$$

и нахождение суммы в формуле (16) проводится $\forall \sigma \in J_\lambda^0$, для каждого из которых найдется такое $t \in J_n$, что

$$\kappa_{t-1} \le |\Omega_\sigma|,\ |\Omega_{\sigma-1}| \le \kappa_t,$$

при этом считаем, что $|\Omega_\lambda| = 0$, а параметры κ_t $\forall t \in J_n^0$ заданы соотношениями (14).

Замечание 1. Иногда условия (10), (11), (16) удобно записывать так:
условие (10) в виде:

$$W_{\lambda-\sigma} = \Omega_\sigma = J_k \setminus \omega_\sigma,\ \ \forall \sigma \in J_\lambda^0; \tag{17}$$

формулу (11) – таким образом,

$$|W_{\lambda-\sigma}| = k - |\omega_\sigma|,\ \ \forall \sigma \in J_\lambda^0, \tag{18}$$

а формула размерности m из (16) трансформируется следующим образом:

$$m = k - \left\{\lambda + \sum\left(|W_{\lambda-\sigma+1}| - |W_{\lambda-\sigma}| - 1\right)\right\}, \tag{19}$$

где сумма определяется $\forall \sigma \in J_\lambda^0$, для которых $\exists t \in J_n$, что

$$\kappa_{t-1} \le |W_{\lambda-\sigma}|,\ \ |W_{\lambda-\sigma+1}| \le \kappa_t; \tag{20}$$

при этом $|W_0| = 0$.

Заметим, что поскольку $\sigma \in J_\lambda^0$, то $l = \lambda - \sigma \in J_\lambda^0$. Поэтому формулы (17)–(20) можно переписать, учитывая, что выполняется условие

$$l + \sigma = \lambda\ . \tag{21}$$

Формула (17) принимает вид:

$$W_l = \Omega_\delta = J_k \setminus \omega_\sigma \quad \forall \sigma \in J_\lambda^0 \ \left(\forall l \in J_\lambda^0\right),$$

$$\emptyset = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{\lambda-1} \subset W_\lambda = J_k; \tag{22}$$

формула (18):

$$|W_l| = k - |\omega_\sigma| \quad \forall \sigma \in J_\lambda^0 \ \left(\forall l \in J_\lambda^0\right); \tag{23}$$

формула (19):

$$m = k - \left\{\lambda + \sum\left(|\omega_{l+1}| - |\omega_l| - 1\right)\right\}, \tag{24}$$

где суммирование ведется $\forall l \in J_\lambda^0$, для которых $\exists t \in J_n$, что

$$\kappa_{t-1} \le |\omega_l|; \ |\omega_{l+1}| \le \kappa_t, \tag{25}$$

где (25) – трансформация формулы (20) при условии (21).

Замечание 2. Не нужно путать W_l из замечания 1 и множество W в формуле (7).

Как направление дальнейших исследований представляется возможным обобщить изложенные результаты на множество k-размещений, используя обе формы теоремы (для ОПМ в виде системы (1)–(2) и для ОПМ в виде системы (5), (6)).

Список использованных источников

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – Київ : Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Емеличев В. А. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – Москва : Наука, 1981. – 344 с.
3. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учеб. пособие / О. А. Емец. – Київ : УМК ВО, 1992. – 92 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – Київ : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.

3. Ємець О. О. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, С. І. Недобачій. – Полтава : Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. – 64 с. – Ч. 1. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488.
4. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2005. – 103 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
5. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними функціями / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна. – Київ : Наук. думка, 2005. – 117 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
6. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування : монографія / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2006. – 129 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/377.
7. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – Київ : Наук. думка, 2008. – 159 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
8. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках / О. А. Емец, Н. Г. Романова. – Київ : Наук. думка, 2010. – 105 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
9. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення : монографія / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 174 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.
10. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
11. Емец О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях : монография / О. А Емец, О. А. Черненко. – Київ : Наук. думка, 2011. – 154 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.
12. Ємець О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації : монографія / О. О. Ємець, О. О. Черненко. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 204 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354.

13. Гуляницький Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Л. Ф. Гуляницький. – Київ, 2005. – 32 с.
14. Донець Г. П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях: монографія / Г. П. Донець, Л. М. Колєчкіна. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – 309 с.
15. Ковалев М. М. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации / М. М. Ковалев, А. Н. Исаченко, Нгуен Нгиа // Докл. АН БССР. – 1978. – Т. 22, № 10. – С. 869–872.
16. Gaiha P. Adjacent vertices on a permutohedron / P. Gaiha, S. Gupta // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – V. 32, № 2. – P. 323–327.
17. Емец О. А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства / О. А. Емец. – Полтава, 1983. – 20 с. – Деп. В УкрНИИНТИ 28.06.83, № 616-УкД83.
18. Емец О. А. Об общем полиперестановочном многограннике и некоторых его свойствах / О. А. Емец // Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1989. – 11 с. – Деп. В УкрНИИНТИ 31.10.89, № 2362-Ук-89.
19. Емец О. А. О геометрических свойствах множества перестановок / О. А. Емец // Тезисы докл. 42 научн. конф. проф., препод., науч. работн., аспир. и студент. ин-та / Минвуз УССР. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1990. – С. 215.
20. Бондаренко В. А. Обобщенные перестановочные многогранники и свойства алгоритмов сортировки / А. В. Бондаренко, Е. В. Шуникова // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Москва, 1985. – 13 с. Деп. В ВИНИГИ № 7454-В85.

УДК 519.85

РУХ В ІНТЕРВАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

Л. Г. Євсеєва, *к. ф.-м. н., доцент;*
Ю. Ю. Глушко, *викладач*
Полтавське вище міжрегіональне професійне училище
yevseeva@gmail.com

В статті введено поняття інтервального руху, досліджено його властивості, що надає можливість визначити методологію побудови інтервальних математичних моделей оптимізаційних задач геометричного проектування, в яких об'єкти можуть не тільки транслюватись, але й повертатись навколо свого полюса.