УДК 519.161

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА K-ФАКТОРА К ПОИСКУ ЗВЕЗДНОГО ПОКРЫТИЯ

***А.Н. Подоляка**, ст. преподаватель*
Национальный аэрокосмический университет «ХАИ»

***О.А. Подоляка**, к.т.н., доцент*
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
podolyaka.oa@gmail.com

В статье рассмотрен полиномиальный алгоритм решения оптимизационной задачи поиска k-фактора двудольного графа.

Podolyaka A.N., Podolyaka O.A. Reduce of k-factor problem to search star coverage of a bipartite graph.
Polynomial algorithm of a bipartite graph k-factor problem are considered.

Ключевые слова: K-ФАКТОР, РЕГУЛЯРНЫЙ ГРАФ, ДВУДОЛЬНЫЙ ГРАФ, ПАРОСОЧЕТАНИЕ.
Keywords: K-FACTOR, REGULAR GRAPH, BIPARTITE GRAPH, MARCHING.

Регулярным называется граф, у которого степени всех вершин равны. K-фактор – это регулярный подграф степени k некоторого графа. В этом смысле регулярный граф нулевой степени состоит из изолированных вершин. Регулярный граф первой степени - это паросочетание, а второй – цикл. Граф третьей степени называют кубическим. Например, кубическими являются графы Петерсена и Хивуда. Регулярный граф наибольшей степени – это клика. Известно, что поиск регулярных подграфов представляет большую сложность [1]. Известные эффективные алгоритмы позволяют находить факторы до третьей степени. Необходимо отметить, что существует множество задач, которые можно свести к поиску факторов высоких порядков. Например, для поиска сбалансированных решений задачи о назначениях, как альтернативы решений задачи на узкое место. Поиск k-фактора можно также применить для решения многокритериальных задач. Ключевая идея этого алгоритма состоит в поиске компромиссных решений через пересечение k-факторов соответствующих критериев. Необходимо отметить, что метод ветвей и границ поиска гамильтонова цикла можно реализовать через поиск k-фактора (см. далее теорему 3). Также заслуживает внимания теорема Нэша-Вильямса, которая связывает существование гамильтонова цикла с наличием k-фактора у графа с 2k+1 вершинами. Связь k-факторов и дважды стохастических матриц прослеживается в теореме Биркгофа. Нужно также отметить, что регулярные графы определяют реберную раскраску графа. Т.к. определение раскраски эквивалентно разложению графа на паросочетания. Данное разложение для двудольных графов отражено в теореме Кенига. Он впервые доказал, что каждый двудольный регулярный граф степени k является объединением k реберно непересекающихся совершенных паросочетаний.

В данной работе рассматривается полиномиальный алгоритм поиска k-фактора двудольного графа. В основе этого алгоритма лежит нормализационный алгоритм [2] решения оптимизационной задачи поиска наибольшего звездного покрытия (НЗП) и следующие теоремы.

Пусть: β - матрица смежности двудольного графа $G(V_1,V_2,E)$, $|V_1|=|V_2|$; F_k - k-фактор G; $w(X)=\sum_{\forall x\in X} x$ - весовая функция; F_k^* - k-фактор минимального веса; P - некоторое совершенное паросочетание графа G. Тогда.

Теорема 1 (Кенига). $F_k=\bigcup_{i=1}^{k}P_i$ **,** $P_i\bigcap P_j=\varnothing$ **,** $\forall(i\neq j)$

Теорема 2. $F_k=F_{k-1}\bigcup P$ **,** $F_{k-1}\bigcap P=\varnothing$

Теорема 3. $w\left(F_k^*\right)\leq w\left(F_{k+1}^*\right)-w(P)$**,** $P\subset F_{k+1}^*$

Определение: пусть A,B матрицы с одинаковым числом строк $I_A=I_B$ и числом столбцов J_A и J_B, тогда *объединение матриц по столбцам* – это матрица $C=A\bigcup B$ размера $\left(I_A,J_A+J_B\right)$, полученная путем объединения всех столбцов матриц A и B.

Определение: *удаление ребра* (i,j) графа или *запрещение элемента* A_{ij} матрицы смежности графа A означает присвоение ему бесконечного веса. Запрещение элемента матрицы будем обозначать $A_{ij}=\infty$, или $A\setminus A_{ij}$, или $A\setminus(i,j)$. *Удаление множества ребер* P из матрицы A обозначим аналогично $A\setminus P$.

Определение: h*-звезда* – это связный двудольный граф $G_{1,h}$, одна из долей которого имеет степень равную h и называется вершиной звезды, а каждая из вершин другой доли – единичную степень. *Наибольшим* h*-звездным покрытием* (НЗП) графа назовем h-звездное покрытие $E_h^{'}\in E$ максимальной мощности.

Рассмотрим алгоритм поиска фактора F_k.

Алгоритм

1. $P_0=\varnothing$; $F_0=\varnothing$.
2. for($\forall q\in\overline{1,k}$)
3. Разложить F_q на q реберно непересекающиеся паросочетаний $F_q=\bigcup_{i=1}^{q}P_i$
4. Определить матрицу β^{q+1} двудольного графа $G^{q+1}(V_1,V_2,E)$, $|V_2|=(q+1)\cdot|V_1|$ по формуле:

$$\beta^{q+1}=\bigcup_{i=0}^{q}\left[\beta\setminus\left(F_q\setminus P_i\right)\right]. \qquad (1)$$

5. Поиск E_{q+1}^* оптимального покрытия G^{q+1} звездами степени $q+1$.
6. Отображение оптимального звездного покрытия в фактор графа $F_{q+1}\Leftarrow E_{q+1}^*$.

На каждой итерации цикла for (шаги 3-6) определяется соответствующий фактор F_q. Третий шаг (разложения фактора) реализуется через рекуррентную формулу теоремы 2 и алгоритм поиска паросочетания. Четвертый шаг сводится к матричным операциям. Пятый шаг – это решение оптимизационной задачи поиска НЗП. Математическая модель этой задачи и алгоритм ее решения рассмотрены в работе [2]. На шестом шаге выполняется восстановление k-фактора из звездного покрытия. Оно реализуется объединением в фактор ребер оптимального звездного покрытия.

Следует отметить, что ключевым элементом сведения задачи поиска k-фактора к поиску звездного покрытия является формула (1). Матрица смежности двудольного графа эквивалентной задачи поиска НЗП β^{q+1} вычисляется по этой формуле. Выражение в круглых скобках $(F_q \setminus P_i) = F_{q-1}$ этой формулы представляет $(q-1)$-фактор, если $(i>0)$ и фактор F_q при $(i=0)$. Выражение в квадратных скобках – это матрица исходного двудольного графа β, в которой запрещены элементы фактора в круглых скобках, вычисленного ранее. Матрица β^{q+1} формируется объединением $(q+1)$ подматриц $[\beta \setminus (F_q \setminus P_i)]$. Заметим, что при объединении матриц многие элементы исходной матрицы β тиражируются по $(q+1)$ раз. После формирования β^{q+1} решается оптимизационная задача поиска НЗП. Следует понимать, что для нахождения k-фактора нужно определить все оптимальные q-факторы $q \in \overline{1,k}$, т.е. k раз решить оптимизационную задачу для каждой матрицы β^q. Поэтому сложность алгоритма поиска k-фактора будет огромной $O(n^7)$.

Выводы

В данной работе впервые представлен полиномиальный алгоритм поиска фактора произвольной степени. Одно доказательство существования данного алгоритма является существенным вкладом в теорию паросочетаний и регулярных графов. Следует отметить, что алгоритм имеет огромную вычислительную сложность, поэтому мало пригоден для решения практических задач. Однако, его можно оптимизировать, т.к. подматрицы $\beta \setminus (F_q \setminus P_i)$, которые формируют матрицу β^{q+1} содержат множество повторяющихся элементов. Поэтому, направлением дальнейших исследований является понижение сложности алгоритма на три порядка до $O(n^4)$.

Следует также отметить, что представленная работа является убедительным доказательством универсальности математической модели задачи поиска НЗП. Нормализационный алгоритм решения оптимизационной задачи поиска звездного покрытия двудольного графа может быть использован при решении задач, сводимых к поиску: паросочетаний, циклических покрытий, звездных покрытий одинаковой и заданной степени, а также поиска k-фактора. Данный алгоритм по праву может называться методом. В дальнейшем планируется получить обобщения для ряда задач на произвольных (не двудольных) графах.

Литература

1. Ловас Л. Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / Л. Ловас, М. Пламмер - М.: Мир, 1998. - 653 с.
2. Подоляка А.Н. Поиск наибольшего покрытия двудольного графа звездами заданной степени. / А.Н. Подоляка, О.А. Подоляка // Автомобіль і електроніка. Сучасні технології. – 2015. – Вип. 8. – С. 60 -70.