

УДК 519.8

## МОДЕЛЮВАННЯ ЦІН ОПЦІОНІВ НА БАЗІ ГІПОТЕЗИ ФРАКТАЛЬНОГО РИНКУ

**Н.Ю.Щестюк**, к.ф.-м.н., доцент

Національного університету “Києво-Могилянська Академія”

*Natalyshch@gmail.com*

*В статті розглядається нова конструкція моделі з активним фрактальним часом для ризикованих базових активів. Пропонується формула для цін опціонів та її порівняння з класичною формулою Блека-Шоулза-Мертонна.*

*Shchestyuk N. Y. Option pricing based on fractal market hypothesis. In the article we present a new construction of fractal activity model for a risky asset with dependence. Option pricing formulas for the proposed models are derived and a comparison with the classical Black-Scholes-Merton pricing formula.*

**Ключові слова:** ОПЦІОН, ГІПОТЕЗА ФРАКТАЛЬНОГО РИНКУ, ФРАКТАЛЬНИЙ АКТИВНИЙ ЧАС.

**Keywords:** OPTION, FRACTAL MARKET HYPOTHESIS, FRACTAL ACTIVITY TIME.

З появою робіт Л. Башельє (1900 рік) в якості основної доктрини для фондових ринків була прийнята гіпотеза ефективного ринку. Згодом на основі даного теоретико-ймовірнісного підходу були створені наразі широко відомі моделі оцінки фінансових активів, такі, як модель Марковіца, САРМ, арбітражна портфельна теорія, моделі ціноутворення опціонів, в числі яких модель Кокса-Роса-Рубінштейна та модель Блека-Шоулза-Мертонна [1]. Всі ці моделі у якості припущення спираються на ідею ефективного ринку.

Гіпотеза ефективного ринку полягає в тому, що відбувається миттєва корекція цін при оновленні інформації, при чому учасники ринку однорідно інтерпретують інформацію, а їхня реакція носить

колективно-раціональний характер. З математичної точки зору модель ефективного ринку – це модель ринку без арбітражних можливостей, в основі якої лежать геометричний броунівський рух і теорія мартингалів. Звідси має справджуватись припущення про незалежність та нормальний розподіл лог-повернень для цін акцій або обмінних курсів валют.

Проте на статистичному матеріалі можна показати, що величина «лог-повернення» має щільність розподілу з «важкими хвостами» і з сильними «видовженнями» в центральній частині. Тобто припущення про нормальний розподіл цих величин не справджується. З часом у поведінці лог-повернень спостерігається властивості «кластерності» та «сильної залежності» (образно – «ціни пам'ятають минуле»). Квадрати та модулі величин лог-повернень виявляються корельованими. До того ж при статистичному аналізі фінансових часових рядів давно було помічено, що багато з них володіють властивістю статистичної самоподібності, яка проявляється у тому, що «частини влаштовані так само як і ціле». Подібні властивості вимагали свого пояснення.

Дослідження показали, що воно може бути дано у рамках концепції автомодельності (самоподібності). Б. Мандельброт був одним з перших, хто запропонував включити в розгляд гіпотезу фрактального ринку. Гіпотеза фрактального ринку включає в себе ряд положень, серед яких основним є присутність на ринку інвесторів з різними інвестиційними горизонтами, при цьому величина ризику інвестора не залежить від довжини його горизонту. Отже, частотний розподіл прибутку на різних інвестиційних горизонтах виглядає приблизно однаково.

В роботі пропонується модель ціни базового активу  $\{P_t, t \geq 0\}$ , що породжується броунівським рухом  $B(T_t)$ , який залежить від “фрактального”, “ринкового” часу [2]:

$$\log P_t = \log P_0 + \mu t + \theta T_t + \sigma B(T_t), \quad (1)$$

де  $\mu \in R$ ,  $\sigma > 0$  є коефіцієнтами дрейфу та дифузії,  $\theta \in R$  визначає асиметрію,  $\{T_t, t \geq 0\}$  є додатним неспадним стохастичним процесом зі стаціонарними, але не обов'язково незалежними приростами  $\tau_t = T_t - T_{t-1}$ . В контексті цієї моделі процес  $\{T_t, t \geq 0\}$  інтерпретується як “активний” час, тобто час, коли ринок еволюціонує та часто асоціюється з обсягом інформації чи потоком інформації, що впливає на ціни.

Для запропонованої моделі (1) лог-дохідності є стохастичним процесом

$$X_t = \log P_t - \log P_{t-1} = \mu + \theta \tau_t + \sigma \sqrt{\tau_t} B(1), \quad (2)$$

де  $\tau_t$  мають обернений гама розподіл  $RG(\alpha, \beta)$  або згортку обернених гама розподілів [3]. Лог-дохідності мають розподіл Стьюдент типу [4]. Справедлива ціна опціонів розраховується як дисконтоване математичне сподівання платіжної функції на підставі формули (1).

В доповіді розглядаються нові конструкції моделі з фрактальним активним часом, та їх порівняння з класичною моделлю Блека-Шоулза-Мертонна.

### **Література**

1. Black, F., and M. Scholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637–654.
2. F.Casteli, N.N.Leonenko, N. Shchestyuk, 2014, Student-like models for risky asset with dependence, *Stochastic Analysis and Applications*, manuscript.
3. Giron, F.J. , Castillo C. A note on the convolution of inverted-gamma distributions with applications to the B-Fisher distribution, - *Statistic and Operations Research*, 2001, 95(1), p.39-44.
4. Heyde, C. C. and Leonenko, N. N., 2005, Student Processes, *Applied Probability*, 37, p. 342-365.