ЗАДАЧА ПРО МАТЕМАТИЧНИЙ СЕЙФ

Г. П. Донець, *д.ф.-м.н., с.н.с*
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН Україні
g_donets@mail.ru

Дослідження задач дискретної оптимізації є передумовою успішного моделювання важливих економічних, природних, соціальних та інших процесів. Наукові публікації протягом минулих двадцяти-тридцяти років в галузі дискретної оптимізації свідчать про необхідність і важливість подібних досліджень. Це пов'язано з тим, що в останній час зросла актуальність розв'язування таких задач при прийнятті рішень в галузі управління та планування виробничих процесів, в задачах геометричного проектування, перспективного планування, теорії розкладів та інших, пов'язаних з вибором одного з можливих варіантів дії. Серед класу комбінаторних оптимізаційних задач особливе місце займають задачі на вершинно розташованих множинах.

Аналіз використання результатів цих досліджень дозволяє зробити висновок про актуальність нових підходів і методів комбінаторної оптимізації.

Розглянемо нову перспективну тему, яка має пряме відношення до однієї з галузей теорії ігор. Маються на увазі задачі, де необхідно, виходячи з початкового стану об'єкту, за певними правилами і мінімальними втратами досягти іншого, наперед заданого стану. Такі задачі зустрічаються в комп'ютерних іграх, і їх можна назвати загальною назвою як позиційні ігри, проте в математичній постановці вони звучать конкретно як задачі про математичний сейф. Розглянемо матрицю B як сейф, у якого елементами є замки – відкриті (дорівнюють 0), та закриті (дорівнюють 1). Якщо вставити ключ у будь-який замок і зробити один поворот, то в тому ж рядку і стовпцю всі нулі стануть одиницями і навпаки. Задача полягає в тому, щоб за мінімальну кількість таких кроків відкрити сейф, тобто в матриці всі елементи повинні стали нулями. Нижче наведено приклад такої матриці, де необхідно зробити певну послідовність кроків, які приводять до цілі. Результати обчислень наведені на нижченаведеній схемі. На кожному кроці замок, в якому треба робити поворот, підкреслено. Алгоритм розв'язання має простий принцип: поворот ключем робиться для того елемента, де сума одиниць в стовпці та рядку непарна.

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&\underline{1}&0&1\\0&0&1&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&0&1&0\\0&\underline{0}&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0\\1&1&0&1&\underline{1}&1\\0&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&1&\underline{1}&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B_{fin}\,.$$

Нехай $X=(x_{ij})_{m,n}$ – розв'язок задачі, де x_{ij} дорівнює числу поворотів ключа в замку (ij). Тоді умова того, що елемент b_{ij} перетвориться матрицею X в нуль, запишеться як відношення

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} x_{kj}+b_{ij}\equiv 0(\mathrm{mod}2)\,, \tag{1}$$

де $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Позначимо $\vec{x}=\left(x_{11},x_{12},\ldots\ldots,x_{1n},x_{21},x_{22},\ldots\ldots,x_{2n},\ldots\ldots,x_{m,n-1},x_{mn}\right)$ вектор-стовпець, отриманий з матриці X послідовним записом її рядків.

Аналогічно з матриці B отримаємо вектор-стовпець $\vec{b}$. Крім того, нехай $\Im_n$ – матриця розміром $n\times n$, яка складається з одиниць, E_n – одинична матриця того ж розміру, а I_n – вектор-рядок з n одиниць. Тоді умова перетворення (1) для всієї матриці B запишеться у вигляді системи рівнянь

$$A\vec{x} \equiv \vec{b}(\mathrm{mod}2), \tag{2}$$

де матриця A розміром $mn \times mn$ складається з m^2 кліток:

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_n & E_n & E_n & .. & .. & E_n \\ E_n & \mathfrak{I}_n & E_n & .. & .. & E_n \\ E_n & E_n & \mathfrak{I}_n & .. & .. & E_n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ E_n & E_n & E_n & .. & .. & \mathfrak{I}_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Матриця A має стандартний вигляд і не залежить від значень матриці B. Її ранг та визначник залежать тільки від значень m та n.

Якщо ранг матриці A дорівнює mn, то розв'язок системи (2) має вигляд

$$\vec{x} = -A^{-1}\vec{b}\,(\mathrm{mod}2). \tag{4}$$

Аналогічно сейф може бути заданий на графі, де замками є вершини, а поворот ключа приводить до зміни стану сусідніх замків, до яких входять дуги від заданого замка. На рис.1 наведено приклад такого сейфа. Задача буде розв'язана, коли всі замки одночасно матимуть нульовий стан.

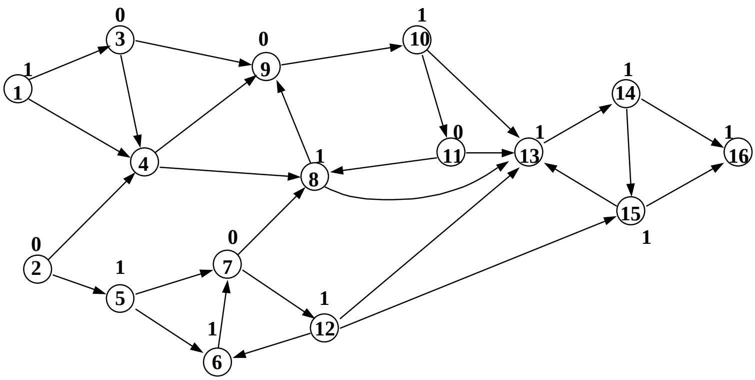

Рис.1. Сейф у вигляді сітки

Для розв'язання задачі на сейфах необхідно скласти систему рівнянь типу (1) для кожного замка. Ця система рівнянь відрізняється від відповідної системи для матриць, тому вона може не мати розв'язків. Можемо отримати приклад узагальненого сейфа, коли кожний замок буде мати декілька станів, причому необов'язково, щоб всі замки були однаковими. Загальна постановка задачі про математичний сейф була запропонована у роботах Донця Г. П. [1] та [2].

Задача. Математичним сейфом називається система $S(Z, b, \langle Z \rangle)$, яка складається з множини замків $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$, вектора початкового стану сейфа $b = (b_1, b_2, ..., b_N)$, де $b_i \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$ – стан i-го замка, та множини $\langle Z \rangle = \{Z_1, Z_2, ..., Z_N\}$, $z_l \notin Z_l$, $Z_l \in 2^Z (1 \le i, l \le N)$. В результаті одного повороту ключа в замку z_l за годинниковою стрілкою всі замки $z_j \in Z_l$ переходять зі стану b_j в стан $(b_j + 1)(\mathrm{mod} k_j)$. Сейф вважається відкритим, якщо він знаходиться в стані $b = (0, 0, \ldots, 0) = b_{fin}$. Необхідно знайти для кожного замка z_i таку кількість поворотів x_i ключем, щоб відкрити сейф.

Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ будемо називати розв'язком задачі про сейф. Множина $\langle Z \rangle$ називається множиною інцидентності. Її можна записати у вигляді матриці інцидентності $A_0 = a_{ij}^0$ розміром $N \times N$, де на головній діагоналі стоять нулі, а $a_{ij}^0 = 1$, якщо z_j належить множині $Z_i (1 \le i, j \le N)$, і нулю в протилежному випадку. Матриці A_0 можна поставити у відповідність орієнтований граф $G(Z)$, в якому від вершини z_i в вершину z_j заходить дуга, якщо $a_{ij}^0 = 1$. В залежності від складності цієї матриці виникають різні задачі про математичний сейф. Позначимо $A = A_0 + E_N$, де E_N – одинична матриця. У стовпці цієї матриці, який відповідає j-у замку, стоять одиниці навпроти тих замків, які впливають на стан j-го замка. Враховуючи кількість всіх поворотів у цих замках та кількість поворотів x_j в даному замку, отримаємо сумарну кількість поворотів ключа, яка виконувалася в j-му замку. В сумі з початковим станом j-го замка це повинно дорівнювати

0 (mod k_j). Тоді загальна задача про математичний сейф зводиться до розв'язання лінійної системи порівнянь:

$$\vec{x}\vec{a}_i + b_i \equiv 0(\mathrm{mod} k_i), (1 \le i \le N), \tag{5}$$

де $\vec{a}_i - i$ - й стовпчик матриці *A*.

Якщо $k_i = \mathrm{K} = const$ для всіх $1 \le i \le N$, то такі замки називаються однотиповими. Якщо сейфи мають різні типи замків, то їх описують вектором $\mathrm{K} = \{k_1, k_2, \ldots, k_N\}$, де деякі компоненти можуть співпадати. Позначимо вектор $b(mod\ K)=(b_1(mod\ k_1), b_2(mod\ k_2), \ldots, b_N(mod\ k_N))$. Тоді загальна задача про сейф на графах зводиться до розв'язування системи лінійних порівнянь

$$A\vec{x} \equiv -b(mod\ K). \tag{6}$$

Якщо існує обернена матриця A^{-1}, то звідси $\vec{x} \equiv - A^{-1}b(mod\ K)$.

Задачі про сейф розв'язані повністю для багатьох графів, здебільшого простих конструкцій. Задача про сейф на матрицях розглядалася спочатку в роботі [3], потім знайшла висвітлення в низці робіт. В них йшла річ про сейфи з однотиповими замками з простим числом їх станів, або зі складовим числом станів та про сейфи з різними типами замків.

Література

1. Донец Г.А., Чжан Бинь. Постановка и решение некоторых задач о математическом сейфе // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 3. – С.3-14.

2. Донец Г.А., Чжан Бинь. Задачи о математическом сейфе на графах // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 5. – С. 84-93.

3. Донец Г.А. Решение матричной задачи о математическом сейфе с однотипными замками // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №2. – С. 155 – 167.