Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОЇ

МОЛОДІЖНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ (ПОО – XXXVII)

Київ – 2011

International Youth School of Mathematics
"The Issues of Calculation Optimization
(ISCOPT–XXXVII)"
September 2011, Katsyveli
The Southern Coast of the Crimea (Ukraine)

Kyiv – 2011

Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОЇ

МОЛОДІЖНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ (ПОО – XXXVII)

Україна, Крим
Велика Ялта, смт. Кацивелі
22–29 вересня 2011 року

Праці школи

Київ – 2011

УДК 517:518:519:533:534

Праці міжнародної молодіжної математичної школи “Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)” – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – 214 с.

Розглядаються питання побудови оптимальних за складністю (та близьких до них) алгоритмів розв’язання наступних класів задач обчислювальної та прикладної математики: цифрова обробка сигналів, відновлення функцій і функціоналів, розв’язування різних класів рівнянь, системний аналіз і математичне програмування, методи захисту інформації.

Відмінною рисою праць школи є їх спрямованість на побудову ефективних за різними критеріями алгоритмів, оцінок їх характеристик, порівняльний аналіз за цими характеристиками та розв’язання широкого спектра прикладних задач. Певна увага приділена комп’ютерній технології розв’язання задач прикладної та обчислювальної математики із заданими значеннями характеристик якості.

Збірник праць розрахований на спеціалістів у галузі обчислювальної та прикладної математики.

ISBN 978-966-02-5965-2

УДК 519.85

Ол-ра О. ЄМЕЦЬ
Полтавський університет економіки і торгівлі, Полтава, yemets2008@ukr.net

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ СУМИ ТА ЛІНІЙНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ З ДИСКРЕТНИМ НОСІЄМ

У роботі [1] введені операції та відношення, необхідні в комбінаторній оптимізації на нечітких множинах з дискретним носієм. Подальше використання цих операцій в комбінаторній оптимізації поставило ряд питань. Для введених в [1] суми нечітких чисел з дискретним носієм, лінійного порядку $\prec$ на них має місце властивість ([1], теорема 6): для будь-яких трьох нечітких чисел x, y, z з дискретним носієм, у яких сума значень функції належності дорівнює одиниці, якщо $x \prec y$, то $x+z \prec y+z$. Виникає питання: наскільки суттєвим є обмеження, що сума значень функції належності має бути одиницею? Друге питання виникає при використанні операцій з [1] в переборних методах: якщо $x \prec y$, а нечітке число z має додатні елементи носія, чи виконується властивість $x \prec y+z$ для суми та лінійного порядку з [1]? Використання цієї властивості в методі гілок та меж дозволило б організувати відсікання безперспективних множин допустимих розв'язків: якщо оцінка y гірша оцінки x, то її «збільшення» $y+z$ залишиться «гірше» x, тому працює відсікання підмножини.

Нечітким числом a називають [1] нечітку множину вигляду $a=\{(a_1 | \mu_1),\ldots,(a_k | \mu_k)\}$, де $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, $a_i \in R^1$, $\forall i \in J_k$ – носій нечіткої множини, $\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k\}$, $\mu_i \in R^1$, $\forall i \in J_k$ – множина значень функції приналежності, $0 \le \mu_i \le 1$, $\forall i \in J_k$. Тут і надалі J_k позначається множина перших k натуральних чисел.

Суму $A+B$ двох нечітких чисел $A=\{(a_1 | \mu_1^A),\ldots,(a_\alpha | \mu_\alpha^A)\}$ і $B=\{(b_1 | \mu_1^B),\ldots,(b_\beta | \mu_\beta^B)\}$ утворимо за допомогою побудови множини пар

$$\widetilde{C}=\{(\widetilde{c}_1 | \mu_1^{\widetilde{C}}),\ldots,(\widetilde{c}_\eta | \mu_\eta^{\widetilde{C}})\}=\left\{\left(a_1+b_1 \,\Big|\, \mu_1^A\cdot\mu_1^B \Big/ \left(\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B\right)\right),\ldots,\left(a_1+b_\beta \,\Big|\, \mu_1^A\cdot\mu_\beta^B \Big/ \left(\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B\right)\right),\ldots,\right.$$

$$\left.\left(a_\alpha+b_1 \,\Big|\, \mu_\alpha^A\cdot\mu_1^B \Big/ \left(\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B\right)\right),\ldots,\left(a_\alpha+b_\beta \,\Big|\, \mu_\alpha^A\cdot\mu_\beta^B \Big/ \left(\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B\right)\right)\right\}. \quad (1)$$

Перші елементи $\widetilde{n}_1,\ldots,\widetilde{n}_\eta$, де $\eta=\alpha\beta$, цих пар утворюють мультимножину $\widetilde{C}^*=\{\widetilde{n}_1,\ldots,\widetilde{n}_\eta\}$. Основа $S(\widetilde{C}^*)$ мультимножини $\widetilde{C}^*$: $S(\widetilde{C}^*)=\{\widetilde{n}_1,\ldots,\widetilde{n}_r\}$ – це носій нечіткого числа $A+B=\{(c_1 | \mu_1),\ldots,(c_r | \mu_r)\}$. Значення функції приналежності знаходять за правилом:

$$\mu_t=\sum_{\forall i\in J_\eta:\ c_t=\widetilde{c}}\mu_i^{\widetilde{C}}, \quad i\in J_\eta, \quad t\in J_r . \quad (2)$$

Сумою $A+B$ двох нечітких чисел A і B називається нечітке число $C=\{(c_1 | \mu_1),\ldots,(b_\gamma | \mu_\gamma)\}$, де $\{c_1,\ldots,c_r\}=S(\widetilde{C}^*)$ – основа $\{\widetilde{c}_1,\ldots,\widetilde{c}_\eta\}$, яка визначається за правилом (1), а значення μ_t – за (2).

Сумою трьох нечітких чисел $A=\{(a_1 | \mu_1^A),\ldots,(a_\alpha | \mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1 | \mu_1^B),\ldots,(b_\beta | \mu_\beta^B)\}$ та $D=\{(d_1 | \mu_1^D),\ldots,(d_\delta | \mu_\delta^D)\}$ називають нечітке число $A+B+D=E+D$, де $E=A+B$.

Характеристичним порівнювачем $H(x): X \to R^1$ числа $A=\{(a_1 | \mu_1^A),\ldots,(a_\alpha | \mu_\alpha^A)\}$ називають функцію, яка нечіткому числу $A\in X$ ставить у відповідність число $H(A)\in R^1$ за правилом

$H(A)=\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A / \sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A$.

Нехай задано два нечіткі числа: $A=\{(a_1 \mid \mu_1^A),...,(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A)\}$ і $B=\{(b_1 \mid \mu_1^B),...,(b_\beta \mid \mu_\beta^B)\}$. Позначимо $a=\{a_1,\ldots,a_\alpha\}$, $b=\{b_1,\ldots,b_\beta\}$, $u=a\cup b=\{u_1,\ldots,u_\gamma\}$. Тоді, число A можна записати у вигляді $A^u=\{(u_1 \mid \mu_1^{A^u}),\ldots,(u_\gamma \mid \mu_\gamma^{A^u})\}$, де $\mu_i^{A^u}=\begin{cases}\mu_j^A, & \text{якщо } u_i=a_j\in a\\ 0, & \text{якщо } u_i\notin a\end{cases}$. Число B запишемо у вигляді: $B^u=\{(u_1 \mid \mu_1^{B^u}),\ldots,(u_\gamma \mid \mu_\gamma^{B^u})\}$, де $\mu_i^{B^u}=\begin{cases}\mu_j^B, & \text{якщо } u_i=b_j\in b\\ 0, & \text{якщо } u_i\notin b\end{cases}$.

Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за зростанням ($\mathrm{A}<\mathrm{B}$), якщо: а) або $\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A / \sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A < \sum_{j=1}^{\beta} b_j \cdot \mu_j^B / \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B$, тобто, коли $\mathrm{H(A)}<H(\mathrm{B})$; б) або $\mathrm{H(A)}=H(\mathrm{B})$, тобто $\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A / \sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A = \sum_{j=1}^{\beta} b_j \cdot \mu_j^B / \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B$, але $\mu_1^{A^u}=\mu_1^{B^u}$, …, $\mu_k^{A^u}=\mu_k^{B^u}$, $\mu_{k+1}^{A^u}<\mu_{k+1}^{B^u}$, ($k<\gamma$), і казати, що A передує B за зростанням.

Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за неспаданням (позначається $\mathrm{A}\prec\mathrm{B}$), якщо: а) або $\mathrm{A}<\mathrm{B}$; б) або $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, тобто тоді, коли $a_i=b_i$ і $\mu_i^A=\mu_i^B$, $\forall i$.

У роботі [1] доведено, що порядок є лінійним, тобто рефлексивним, антисиметричним та транзитивним. Доведено таку теорему в [1].

Теорема 6 з [1]. Для будь-яких трьох нечітких чисел $x=\{(x_1 \mid \mu_1^x),\ldots,(x_\alpha \mid \mu_\alpha^x)\}$, $y=\{(y_1 \mid \mu_1^y),\ldots,(y_\beta \mid \mu_\beta^y)\}$, $z=\{(z_1 \mid \mu_1^z),\ldots,(z_\gamma \mid \mu_\gamma^z)\}$, таких, що $\sum_{k=1}^{\alpha}\mu_k^x=\sum_{k=1}^{\beta}\mu_k^y=\sum_{k=1}^{\gamma}\mu_k^z=1$, $x_1<\ldots<x_\alpha$, $y_1<\ldots<y_\beta$, $z_1<\ldots<z_\gamma$, виконується наступне правило: якщо $x\prec y$, то $x+z\prec y+z$.

У роботі [1] доведено наступні дві теореми.

Теорема 1. Якщо $A=\{(a_1 \mid \mu_1^A),...,(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1 \mid \mu_1^B),...,(b_\beta \mid \mu_\beta^B)\}$, $C=\{(c_1 \mid \mu_1),...,(b_r \mid \mu_r)\}$, $C=A+B$ за означенням 2, то

$$\sum_{i=1}^{r}\mu=1. \tag{3}$$

Зауваження. Отже, вже після першого додавання в сумі декількох нечітких чисел маємо як результат C з властивістю (3). Тобто, це дозволяє вважати, що додаються нечіткі числа з такою властивістю (сума значень функції належності рівна одиниці), оскільки належність чи відсутність такої операції не впливає на результат суми. Тому використання теореми 6 з [1] практично не обмежується необхідністю для кожного з них мати властивість (3).

Теорема 2. Для будь-яких нечітких чисел $A=\{(a_1 \mid \mu_1^A),...,(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1 \mid \mu_1^B),...,(b_\beta \mid \mu_\beta^B)\}$ та $C=\{(c_1 \mid \mu_1^C),...,(b_\gamma \mid \mu_\gamma^C)\}$, $c_i\geq 0$ $\forall i\in J_\gamma$ має місце властивість: якщо $A\prec B$, то $A\prec B+C$.

У роботі доведено дві нові властивості операції суми та лінійного порядку для нечітких чисел з дискретним носієм, що розширює можливості їх використання при розв'язуванні задач комбінаторної оптимізації у нечіткій постановці. Напрям подальших досліджень – перевірка аналогічних властивостей для нечітких чисел з континуальним носієм та операцій над ними, розглянутих в [2].

1. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Операції та відношення над нечіткими числами // Наукові вісті НТУ України «КПІ». – 2008. – № 5. – С. 39–46.
2. Емец О.А., Парфенова Т.А. Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для

моделирования в комбинаторной оптимизации // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 2. – С. 86–101.