ВІСНИК

ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

№337

Львів
1998

ВІСНИК

ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

№337

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ТОМ 2

МАТЕМАТИЧНА І ТЕРЕТИЧНА ФІЗИКА

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

математичних методів у науково-технічних дослідженнях" Тези доповідей. Ч.3/ Міносвіта. Український державний університет "Львівська політехніка". Львів, 1995. - С. 32-33

7. Шор Н.З., Соломон Д.И. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. - Киев, 1989. - 203с.

УДК 519.85

О.О. Ємець, А.А. Роскладка

ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ОЦІНОК ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ СИЛЬНО ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ НА СПОЛУЧЕННЯХ

Для побудови алгоритмів комбінаторної оптимізації необхідно вміти давати оцінки мінімуму. Велика кількість таких оптимізаційних задач розв'язується на множинах сполучень (задача про ранець [1,2], задача інтерполяції дискретної функції, що отримана експерементальним шляхом [1,2] та багато інших). Дана робота присвячена цій актуальній проблемі для задач евклідової комбінаторної множини сполучень з повтореннями.

Введемо необхідні означення.

Нехай J_n- множина n перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1,\dots,n\}$. $J_n^0 = J_n \cup \{0\}$, $J_0 = \varnothing$.

Розглянемо мультимножину $G = \{g_1, g_2, \dots, g_h\}$, $g_i \in R^1, \forall i \in J_h$ з основою $S(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ і первинною специфікацією $[G] = \{k^n\}$, тобто мультимножина G має по k екземплярів кожного з e_i елементів. Елементами евклідової множини k-сполучень (див. напр. [1], [3]) з повтореннями $\overline{S}_n^k(G)$ є всі упорядковані k-вибірки з мультимножини G вигляду $e = \left(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}\right)$ при виконанні умови $g_{i_1} \le g_{i_2} \le \dots \le g_{i_k}$, де $g_{i_j} \in G,\ i_j \ne i_t\ \forall\, i_j,\ i_t \in J_h,\ \forall j,\ t \in J_k$.

Для посилення екстремальних оцінок використаємо дві леми з роботи [4].

Лема 1.[4]. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і дифференційовна на опуклій замкненій множині $X \supset E$, то $\forall x \in X$

$$\min_{y\in E} \psi(y) \ge \psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho\sum_{i=1}^{k} g_{\sigma_i}^2 + \min_{y\in E} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right) y_i,$$ де

константа g_{σ_i} задовільняє умові $g_{\sigma_i} \in G\ \forall i \in J_\eta,\ \left|g_{\sigma_i}\right| \le \left|g_{\sigma_{i+1}}\right|\ \forall i \in J_{\eta-1}$.

Посилимо оцінку мінімуму, взявши максимум по $x \in X$ від правої частини нерівності

$$\min_{y\in E} \psi(y) \ge \max_{x\in X} [\psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho\sum_{i=1}^{k} g_{\sigma_i}^2 +$$

$$+ \min_{y\in E} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right) y_i].$$

Доданок, що не залежить від x виносимо за знак максимума і перетворимо останній доданок правої частини нерівності, перемноживши відповідні компоненти скалярного добутку

$$\min_{y\in E}\psi(y) \ge \rho\sum_{i=1}^{k} g_{\sigma_i}^2 + \max_{x\in X}[\psi(x) - \left(\nabla\psi(x), x\right) + \rho x^2 +$$

$$+\min_{y\in E}(\left(\nabla\psi(x), y\right) - (2\rho x, y))],$$

де $\nabla\psi(x) = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

Застосувавши очевидну формулу для мінімуму різниці, маємо

$$\min_{y\in E}\psi(y) \ge \rho\sum_{i=1}^{k} g_{\sigma_i}^2 + \max_{x\in X}[\psi(x) - \left(\nabla\psi(x), x\right) + \rho x^2 +$$

$$+\min_{y\in E}\left(\nabla\psi(x), y\right) - \max_{y\in E}(2\rho x, y)].$$

Таким чином доведено наступне твердження.

Твердження 2. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і дифференційовна на опуклій замкненій множині $X \supset E$, то

$$\min_{y\in E}\psi(y) \ge \rho\sum_{i=1}^{k} g_{\sigma_i}^2 + \max_{x\in X}[\psi(x) - \left(\nabla\psi(x), x\right) + \rho x^2 +$$

$$+\min_{y\in E}\left(\nabla\psi(x), y\right) - \max_{y\in E}(2\rho x, y)].$$

Лема 3.[4]. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і дифференційовна на опуклій замкненій множині $X \supset E$, то $\forall x \in X$

$$\min_{y\in E}\psi(y) \ge \psi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(x)\|^2 + \rho\|g^* - c\|^2,$$

де $g^* = \arg\min_{x\in E}\|x - c\|^2$ при $c = x - \nabla\psi(x)/(2\rho)$.

Аналогічно і тут можна посилити оцінку мінімуму функції $\psi(y)$, взявши максимум по $x \in X$ від правої частини нерівності, тобто

$$\min_{y\in E}\psi(y) \ge \max_{x\in X}[\psi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(x)\|^2 + \rho\|g^* - c\|^2].$$

Винесемо з-під знака максимуму доданок, що не залежить від x

$$\min_{y\in E}\psi(y) \ge \rho\|g^* - c\|^2 + \max_{x\in X}[\psi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(x)\|^2].$$

Таким чином доведено наступне твердження.

Твердження 4. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і дифференційовна на опуклій замкненій множині $X \supset E$, то

$$\min_{y\in E}\Psi(y) \geq \rho\left\|g^{*}-c\right\|^{2} + \max_{x\in X}[\,\psi(x) - \frac{1}{4\rho}\left\|\nabla\psi(x)\right\|^{2}].$$

Розглянуті оцінки для множини E можна застосувати для евклідової комбінаторної множини сполучень з повтореннями $\overline{S}_{n}^{k}(G)$.

Твердження 5. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і дифференційовна на опуклій замкненій множині $X \in R^{k}, \overline{S}_{n}^{k}(G) \subset X$, , то

$$\min_{y\in E}\Psi(y) \geq \rho k\tilde{g}^{2} + \max_{x\in X}[\Psi(x) - (\nabla\psi(x),x) + \rho x^{2} +$$

$$+e_{1}(\sum_{i=1}^{s}\nabla\psi(x_{i}) - 2\rho x_{i}) + e_{n}(\sum_{i=s+1}^{k}\nabla\psi(x_{i}) - 2\rho x_{i})],$$

де константа $\tilde{g} = \min|g_{i}|$, $g_{i} \in G$, константа $s \in J_{k}^{0}$ визначається системою

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{t}\left(\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_{s-j+1}} - 2\rho x_{s-j+1}\right) \geq 0 & \forall t \in J_{s}, \\ \sum\limits_{j=1}^{t}\left(\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_{s-j+1}} - 2\rho x_{s-j+1}\right) \geq 0 & \forall t \in J_{k-s}, \end{cases}$$

e_{1}, e_{n} - відповідно найменший та найбільший елементи основи мультимножини.

Твердження 6. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і дифференційовна на опуклій замкненій множині $X \in R^{k}, \overline{S}_{n}^{k}(G) \subset X$, , то

$$\min_{y\in\overline{S}_{n}^{k}(G)} \psi(y) \geq \rho\left\|g^{*}-c\right\|^{2} + \max_{x\in X}[\,\psi(x) - \frac{1}{4\rho}\left\|\nabla\psi(x)\right\|^{2}].$$

Розглянуті в даній роботі оцінки мінімуму посилюють аналогічні оцінки, що досліджуються в роботі [5], і дозволяють з більшою точністю оцінити екстремальні значення цільових функцій при їх використанні для розв'язку задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Перелік посилань:

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації: Монографія. - К.: ІСДО. - 1993. - 188с.

2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. - К: Наук.думка, 1980. - 208с.

3. Ємець О.О. Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ...докт. фіз.-мат. наук.- Київ, 1997.- 42с.

4. Емец О.А. Об оптимизации выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок // Журнал вычисл. математики и матем. физики. - 1994, № 6, с.855-869.

5. Емец О.А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями// Укр.мат.журн. - 1994. -т.46, №6. -с.680-691.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ