

В І С Н И К

ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"



ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

№337

Львів
1998

ВІСНИК

**ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"**

№337

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ТОМ 2

**МАТЕМАТИЧНА І
ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА**

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

математичних методів у науково-технічних дослідженнях” Тези доповідей. Ч.3/ Міносвіта. Український державний університет “Львівська політехніка”. Львів, 1995. - С. 32-33

7. Шор Н.З., Соломон Д.И. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. - Киев, 1989. - 203с.

УДК 519.85

О.О. Ємець, А.А. Роскладка

ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ОЦІНОК ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ СИЛЬНО ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ НА СПОЛУЧЕННЯХ

Для побудови алгоритмів комбінаторної оптимізації необхідно вміти давати оцінки мінімуму. Велика кількість таких оптимізаційних задач розв'язується на множинах сполучень (задача про ранець [1,2], задача інтерполяції дискретної функції, що отримана експериментальним шляхом [1,2] та багато інших). Дана робота присвячена цій актуальній проблемі для задач евклідової комбінаторної множини сполучень з повтореннями.

Введемо необхідні означення.

Нехай J_n - множина n перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1, \dots, n\}$. $J_n^0 = J_n \cup \{0\}$, $J_0 = \emptyset$.

Розглянемо мультимножину $G = \{g_1, g_2, \dots, g_h\}$, $g_i \in R^1, \forall i \in J_h$ з основою $S(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ і первинною специфікацією $[G] = \{k^n\}$, тобто мультимножина G має по k екземплярів кожного з e_i елементів. Елементами евклідової множини k -сполучень (див. напр. [1], [3]) з повтореннями $\bar{S}_n^k(G)$ є всі упорядковані k -вибірки з мультимножини G вигляду $e = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k})$ при виконанні умови $g_{i_1} \leq g_{i_2} \leq \dots \leq g_{i_k}$, де $g_{i_j} \in G, i_j \neq i_t \forall i_j, i_t \in J_h, \forall j, t \in J_k$.

Для посилення екстремальних оцінок використаємо дві леми з роботи [4].

Лема 1.[4]. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \supset E$, то $\forall x \in X$

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \psi(x) - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^k x_i^2 + \rho \sum_{i=1}^k g_{\sigma_i}^2 + \min_{y \in E} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i, \text{ де}$$

константа g_{σ_i} задовільняє умові $g_{\sigma_i} \in G \forall i \in J_n, |g_{\sigma_i}| \leq |g_{\sigma_{i+1}}| \forall i \in J_{n-1}$.

Посилимо оцінку мінімуму, взявши максимум по $x \in X$ від правої частини нерівності

$$\begin{aligned} \min_{y \in E} \psi(y) \geq \max_{x \in X} \left[\psi(x) - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^k x_i^2 + \rho \sum_{i=1}^k g_{\sigma_i}^2 + \right. \\ \left. + \min_{y \in E} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i \right]. \end{aligned}$$

Доданок, що не залежить від x виносимо за знак максимуму і перетворимо останній доданок правої частини нерівності, перемноживши відповідні компоненти скалярного добутку

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho \sum_{i=1}^k g_{\sigma_i}^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - (\nabla \psi(x), x) + \rho x^2 + \min_{y \in E} ((\nabla \psi(x), y) - (2\rho x, y))],$$

де $\nabla \psi(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$.

Застосувавши очевидну формулу для мінімуму різниці, маємо

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho \sum_{i=1}^k g_{\sigma_i}^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - (\nabla \psi(x), x) + \rho x^2 + \min_{y \in E} ((\nabla \psi(x), y) - \max_{y \in E} (2\rho x, y))].$$

Таким чином доведено наступне твердження.

Твердження 2. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \supset E$, то

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho \sum_{i=1}^k g_{\sigma_i}^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - (\nabla \psi(x), x) + \rho x^2 + \min_{y \in E} ((\nabla \psi(x), y) - \max_{y \in E} (2\rho x, y))].$$

Лема 3.[4]. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \supset E$, то $\forall x \in X$

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla \psi(x)\|^2 + \rho \|g^* - c\|^2,$$

де $g^* = \arg \min_{x \in E} \|x - c\|^2$ при $c = x - \nabla \psi(x) / (2\rho)$.

Аналогічно і тут можна посилити оцінку мінімуму функції $\psi(y)$, взявши максимум по $x \in X$ від правої частини нерівності, тобто

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \max_{x \in X} [\psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla \psi(x)\|^2 + \rho \|g^* - c\|^2].$$

Винесемо з-під знака максимуму доданок, що не залежить від x

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho \|g^* - c\|^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla \psi(x)\|^2].$$

Таким чином доведено наступне твердження.

Твердження 4. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \supset E$, то

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho \|g^* - c\|^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla \psi(x)\|^2].$$

Розглянуті оцінки для множини E можна застосувати для евклідової комбінаторної множини сполучень з повтореннями $\bar{S}_n^k(G)$.

Твердження 5. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \in R^k, \bar{S}_n^k(G) \subset X$, то

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho k \tilde{g}^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - (\nabla \psi(x), x) + \rho x^2 + e_1 (\sum_{i=1}^s \nabla \psi(x_i) - 2\rho x_i) + e_n (\sum_{i=s+1}^k \nabla \psi(x_i) - 2\rho x_i)],$$

де константа $\tilde{g} = \min |g_i|$, $g_i \in G$, константа $s \in J_k^0$ визначається системою

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^t \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{s-j+1}} - 2\rho x_{s-j+1} \right) \geq 0 & \forall t \in J_s, \\ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{s-j+1}} - 2\rho x_{s-j+1} \right) \geq 0 & \forall t \in J_{k-s}, \end{cases}$$

e_1, e_n - відповідно найменший та найбільший елементи основи мультимножини.

Твердження 6. Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \in R^k, \bar{S}_n^k(G) \subset X$, то

$$\min_{y \in \bar{S}_n^k(G)} \psi(y) \geq \rho \|g^* - c\|^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla \psi(x)\|^2].$$

Розглянуті в даній роботі оцінки мінімуму посилюють аналогічні оцінки, що досліджуються в роботі [5], і дозволяють з більшою точністю оцінити екстремальні значення цільових функцій при їх використанні для розв'язку задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Перелік посилань:

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації: Монографія. - К.: ІСДО. - 1993. - 188с.
2. Сергиенко И.В., Каспицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. - К: Наук.думка, 1980. - 208с.
3. Ємець О.О. Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ...докт. фіз.-мат. наук.- Київ, 1997.- 42с.
4. Емец О.А. Об оптимизации выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок // Журнал вычисл. математики и матем. физики. - 1994, № 6, с.855-869.
5. Емец О.А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями// Укр.мат.журн. - 1994. -т.46, №6. -с.680-691.

- В.М. Старков МАТЕМАТИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ФІЗИКИ
- Н.М. Тимошенко, С.І. Томецька ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ
ЦИЛІНДРА ПРИ ПОВЕРХНЕВОМУ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВІ
- А. В. Усов, А. М. Зелений, Д. В. Іоргачов МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ УМОВ ВІДРИВУ У
ВИРОБАХ З ПОКРИТТЯМ
- Д.О. Харченко ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ У СИСТЕМІ СТОХАСТИЧНОГО МОДУЛЬОВАНОГО
ОСЦИЛЯТОРА
- В.І. Чигінь, О.В. Бойко ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ІМПУЛЬСНИХ ПРОЦЕСІВ У ВІД'ЄМНІЙ
КОРОНІ У СУМІШАХ ГАЗІВ
- Р.М. Швець, О.І. Яцків, В.В. Буряк ПРО ОДНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ
ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

- І.А. Анджейчак, І.М. Бойко ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ В ЗАДАЧАХ НА ВЛАСНІ
ЗНАЧЕННЯ КОЛИВАННЯ ОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН
- М.Д. Бабиць, А.І. Березовський, П.М. Бесараб, В.К. Задірака, В.О. Людвиченко ЕФЕКТИВНІ
АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ ϵ -РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ЗАДАЧ
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
- Б.Й. Бандирський, І.І. Демків МОНОТОННІ ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ
ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ
- Т.А. Баранова, О.М. Литвин, В.В. Федько ПРО ЧИСЕЛЬНУ РЕАЛІЗАЦІЮ ОПТИМАЛЬНОГО
МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (ЗАДАЧА ДІРХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ
ПУАССОНА, ПРЯМОКУТНІ ЕЛЕМЕНТИ)
- А.І. Березовський, П.М. Бесараб, В.К. Задірака, Л.Б. Шевчук ПРО ОПТИМІЗАЦІЮ ЗА ШВИДКОДІЄЮ
АЛГОРИТМІВ ВИКОНАННЯ ОПЕРАЦІЙ НАД БАГАТОРОЗРЯДНИМИ ЦІЛИМИ
ЧИСЛАМИ
- М.І. Верхола, М.М. Луцків МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗКОЧУВАННЯ ФАРБИ У ФАРБОВОМУ
АПАРАТІ ПРИ ДИСКРЕТНІЙ ПОДАЧІ
- В.В. Вороненко, Є.М. Максимів, В.В. Складанівський, М.І. Худий ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ
БЛОЧНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ В РОЗПОДІЛЕНІЙ
СИСТЕМІ
- М.Н. Гофман, О.В. Губа КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ КОНУСІВ
- Гудз Г.Б. РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ
РІВНЯНЬ ВИЩІХ ПОРЯДКІВ
- О.М. Дашко ВИКОРИСТАННЯ НАПВЛПШИЦІЄВОСТІ В ТЕОРІЇ ДВОСТОРОННІХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ
- Б.В. Дурняк, І.Т. Стрепко, О.В. Тимченко МЕТОДИКА СИНТЕЗУ ШВИДКОДІЮЧИХ СИСТЕМ З
РІЗНИЦЕВИМ ПОДАВАННЯМ СИГНАЛІВ
- П.С. Євтух ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ НА ЕОМ У СКЛАДІ ІВС
- О.О. Ємець, Л.М. Колечкіна РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ДРОБОВО-
ЛІНІЙНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ НА ЗАГАЛЬНІЙ МНОЖИНІ ПЕРЕСТАВЛЕНЬ
- О.О. Ємець, А.А. Роскладка ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ОЦІНОК ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ СИЛЬНО
ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ НА СПОЛУЧЕННЯХ
- І.О. Завадський АЛГОРИТМ ДОДАВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ ВІД
БАГАТЬОХ ЗМІННИХ
- О.Я. Ковальчук АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ З ТЕПЛИЦЕВИМИ λ -МАТРИЦІЯМИ
- М.І. Копач ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ГРОНУОЛА І ВЕНДРОФА
- П.І. Копійка МАТЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИБУХОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПЛОСКИХ КАНАЛАХ
З НАПВПРОНИКЛИВИМИ ЕКРАНАМИ
- І.В. Крикова, О.М. Литвин ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ВІДНОВЛЕННЯ КРИВИХ ЗА
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ ІЗОГЕОМЕТРІЇ
- З.І. Крупка ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРНИХ ДІАГРАМ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО
ПРОГРАМУВАННЯ НА ПЛОЩИНІ