



**Українська Федерація Інформатики**  
**Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України**  
**Вищий навчальний заклад Укоопспілки**  
**«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»**  
**(ПУЕТ)**

# **ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)**

**МАТЕРІАЛИ  
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ  
КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ**

**(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)**

За редакцією професора О. О. Ємця

**Полтава  
ПУЕТ  
2015**

## ТОЧНІСТЬ НАПІВВИЗНАЧЕНОЇ РЕЛАКСАЦІЇ ДЛЯ ЗАДАЧ МАКСИМІЗАЦІЇ НОРМИ ВЕКТОРА

*А. І. Косолап, д.ф.-м.н., професор;*

*А. С. Перетяцько, асистент*

*Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет»*

*anivkos@ua.fm, \_nasya\_@ua.fm*

Розглянемо загальну задачу квадратичної оптимізації:

$$\min\{x^T Qx + p^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x \leq c_i, i = 1, \dots, m\}, \quad (1)$$

де  $Q$  – симетрична матриця ( $n \times n$ ),  $A_i$  – симетричні матриці ( $n \times n$ ),  $x$  – вектор-стовпчик змінних розмірності  $n$ ,  $b_i$  та  $p$  – вектор-стовпчики розмірності  $n$ ,  $c$  – вектор-стовпчик розмірності  $m$  з компонентами  $c_i$ .

Використаємо точну квадратичну регуляризацію [1] для розв’язування квадратичної задачі (1). Таким чином, отримали наступну задачу

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{x}\|^2 \mid \tilde{x}^T Q\tilde{x} + p^T \tilde{x} + s + (r-1)(\|\tilde{x}\|^2) \leq d \\ \tilde{x}^T A_i \tilde{x} + b_i^T \tilde{x} - c_i + r \|\tilde{x}\|^2 \leq d, i = 1, \dots, m \end{array} \right\}, \quad (2)$$

або

$$\min \left\{ \begin{array}{l} -\|\tilde{x}\|^2 \mid \tilde{x}^T Q\tilde{x} + p^T \tilde{x} + s + (r-1)(\|\tilde{x}\|^2) - d \leq 0 \\ \tilde{x}^T A_i \tilde{x} + b_i^T \tilde{x} - c_i + r \|\tilde{x}\|^2 - d \leq 0, i = 1, \dots, m \end{array} \right\},$$

яка є квадратичною. Значення  $r > 0$  вибирається таким, щоб обмеження задачі (2) були опуклими, а  $s$  – фіксований параметр. Застосуємо до неї напіввизначену релаксацію [164]. Введемо матрицю змінних  $Y$ , яка може бути виражена через будь-який вектор  $x$  таким чином:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \text{ де } I - \text{одинична матриця,}$$

$$\tilde{A}_i = \left( \begin{pmatrix} (-c_i - d) & \frac{b_i^T}{2} \\ \frac{b_i}{2} & A_i \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\tilde{A}_{m+1} = \left( \begin{pmatrix} (s - d) & \frac{p^T}{2} \\ \frac{p}{2} & Q \end{pmatrix} + (r - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right).$$

Тоді маємо таку задачу напіввизначеної оптимізації для задачі максимізації норми вектора на перетині еліпсоїдів (2):

$$\min\{ \tilde{C} \bullet Y \mid \tilde{A}_i \bullet Y \leq 0, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad Y \succeq 0 \}, \quad (3)$$

розв'язавши яку отримаємо нижню оцінку розв'язку задачі (2). В деяких випадках розв'язок задачі (3) буде оптимальним розв'язком задачі (2). Розглянемо ці випадки.

Нехай  $P$  – прямокутний паралелепіпед, який можна представити у вигляді

$$P = \{x \mid (x_i - a_i)(x_i - b_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Тоді буде справедливим наступне твердження.

**Теорема 1.** *Напіввизначена релаксація для квадратичної задачі*

$$\max\{\|x\|^2 \mid x \in P\}$$

є точною.

Розглянемо іншу опуклу множину – симплекс, який задамо наступним чином

$$\Delta = \{x \mid x_i(x_i - a) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad c^T x = 1\}.$$

Для цієї опуклої множини справедливе аналогічне твердження.

**Теорема 2.** *Напіввизначена релаксація для квадратичної задачі*

$$\max\{\|x\|^2 \mid x \in \Delta\}$$

є точною.

**Зауваження.** На відміну від паралелепіпеда, відповідна задача SDP матиме ранг 2. Це означає, що вимога рівності ранга матриці задачі SDP одиниці, при якому напіввизначена релаксація буде точною, є тільки достатньою, але не необхідною умовою.

Розглянемо задачу

$$\max\{\|x\|^2 \mid Ax = b, x \geq 0\}. \quad (4)$$

Представимо її у вигляді

$$\max\{\|x\|^2 \mid Ax = b, x_i(x_i - c_i) \leq 0, i = 1, \dots, n\}, \quad (5)$$

де значення  $c_1, \dots, c_n$  обираємо таким чином, щоб розв'язок задачі (4) був допустимий для задачі (5). Тоді справедливо наступне твердження.

**Теорема 3.** Нехай  $x^*$  - розв'язок задачі (5) та нерівність  $c^T x^* \geq c^T x$  виконується для усіх допустимих  $x$ , тоді, якщо виконується нерівність  $\|x^*\|^2 \geq \|x\|^2$ , то напіввизначена релаксація для задачі (5) буде точною.

Метод точної квадратичної регуляризації перетворює загальну квадратичну задачу до максимізації норми вектору на опуклій множині. Знайдені умови, при яких напіввизначена релаксація буде точною для деяких класів загальних квадратичних задач.

### *Література*

1. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. – Днепропетровск: Наука и образование, 2013. – 316 с.
2. Luo Z.-Q. Semidefinite Relaxation of Quadratic Optimization Problems / Zhi-Quan Luo, Wing-Kin Ma, Anthony Man-Cho So, Yinyu Ye, and Shuzhong Zhang // SP magazine, special issue on “Convex opt. for SP”. – 2010. – 14 p.