Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.161

РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

***А. В. Морозов**, к. т. н.*
Житомирский государственный технологический университет
***А. В. Панишев**, д. т. н., проф.*
Житомирский государственный технологический университет
morozov.andriy@gmail.com

Широко известные методы решения задачи о назначениях (ЗН), такие, как венгерский метод, метод Кана-Мункреса и метод потенциалов, построены с использованием разных подходов, применяемых в комбинаторной оптимизации, и характеризуются разной временной сложностью, не меньшей, чем $O(n^3)$, где n – порядок матрицы стоимостей [1]. В [2] изложен алгоритм решения одного из вариантов ЗН, стоимость которого понижена до $O(n^2)$. В [2] показано, что он выполняет функции процедуры, встроенной в метод ветвей и границ для быстрого вычисления более точных нижних оценок стоимости замкнутых маршрутов в задаче коммивояжера. Алгоритм состоит в нахождении взвешенного паросочетания минимального суммарного веса в двудольном графе с $2n$ вершинами, используя введенные в [2] понятия кратчайшего увеличивающего пути. В данной статье описан рекуррентный метод решения ЗН, развивающий результаты работ [2, 3] и технически упрощающий наиболее распространенный венгерский метод.

Предлагаемый алгоритм состоит из такого же числа этапов и имеет такую же временную сложность, что и наилучший из известных методов оптимального назначения – венгерский метод [1].

S0. Алгоритм решения ЗН для матрицы стоимостей $C = \left[c_{ij} \right]_n$, $n \geq 2$, элементы которой принимают значения из множества неотрицательных действительных чисел или равны

∞; решение представлено совершенным паросочетанием $\pi = \pi_n$ с минимальной суммой $C\ \ \pi$ весов рёбер $\ i, j\ $ в двудольном графе $(X,\ Y,\ U)$, $|X| = |Y| = n, i \in X, j \in Y$, где $c_{ij} \in R_0^+$, если $\ i, j\ \in U$, иначе $c_{ij} = \infty$; $k = 1$; найти $c_{i_k j_k} = \min\ c_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}\ $, $I_k = \ i_k\ , J_k = \ j_k\ , \pi_k = \ \ i_k, j_k\ \ , C\ \ \pi_k\ = c_{i_k j_k}$.

S1. $k = k + 1$; если $k > n$, то конец: построено решение ЗН π.

S2. Найти $c_{i_k j_k} = \min\ c_{ij} \mid i \in X - I_{k-1}, j \in Y - J_{k-1}\ $; если $c_{i_k j_k} = \infty$, то положить $MIN1 = \infty$, иначе $\pi_k^1 = \pi_{k-1} \cup\ i_k, j_k\ $, $MIN1 = C\ \ \pi_k^1\ $.

S3. Найти все i_r такие, что для $j_l \in J_{k-1}$, $l \in\ 1, 2, ..., k-1\ $, $c_{i_r j_l} = \min\ c_{ij_l} \mid i \in X - I_{k-1}\ \neq \infty$, и сформировать из них список X_k; если $X_k = \varnothing$, то положить $MIN2 = \infty$ и перейти к шагу S6.

S4. Найти все j_p такие, что для $i_l \in I_{k-1}, l \in\ 1, 2, ..., k-1\ $, $c_{i_l j_p} = \min\ c_{i_l j} \mid j \in J_{k-1}\ \neq \infty$, и сформировать из них список Y_k; если $Y_k = \varnothing$, то положить $MIN2 = \infty$ и перейти к шагу S6.

S5. Построить взвешенный орграф $(V,\ A)$, $V = \ i_0\ \cup X_k \cup \cup I_{k-1} \cup Y_k$ и выполнить в нем поиск пути, кратчайшего на множестве всех путей в вершины Y_k, достигаемые из i_0; если построен такой путь, то в графе $(X,\ Y,\ U)$ найти соответствующий ему кратчайший увеличивающий путь P_k относительно паросочетания π_{k-1} и определить $\pi_k^2 = \ P_k - \pi_{k-1}\ \cup\ \pi_{k-1} - P_k\ $, $MIN2 = C\ \ \pi_k^2\ $, иначе положить $\pi_k^2 = \varnothing, MIN2 = \infty$.

S6. Если $MIN1 = MIN2 = \infty$, то конец: не существует для матрицы $\left[c_{ij} \right]_n$ решения ЗН; если $MIN1 \neq \infty$ или $MIN2 \neq \infty$, то если $MIN1 \leq MIN2$, то $\pi_k = \pi_k^1$, $I_k = I_{k-1} \cup\ i_k\ $, $J_k = J_{k-1} \cup\ j_k\ $, иначе $\pi_k = \pi_k^2$, $I_k = \ i_l \mid l = \overline{1,k};\ i_l, j_l \ \in \pi_k^2 \ $, $J_k = \ j_l \mid l = \overline{1,k}$, $i_l, j_l \ \in \pi_k^2 \ $, перейти к шагу S1.

Теорема. Решение ЗН σ корректно находится за время $O\ n^3$ построением в двудольном графе (*X*, *Y*, *U*), $|X| = |Y| = n$, соответствующем её матрице стоимостей $\left[c_{ij}\right]_n$, последовательностей паросочетаний π_k, $k = \overline{1,n}$, где π_k – паросочетание, содержащее *k* рёбер минимального веса, $\sigma = \pi_n$.

Предложенный метод решения задачи о назначениях основан на рекурсивном получении оптимального решения задачи. Вычислительная схема рекуррентного метода решения задачи о назначениях представлена в форме, удобной для реализации на ЭВМ. Изложенная схема поиска оптимального назначения является основой алгоритма, в котором решение задачи находится исключительно средствами теории паросочетаний для двудольных графов, представленными в перестановочно-матричной форме.

Для оценки времени решения ЗН предложенным в статье методом проведен вычислительный эксперимент. Исследовалась зависимость времени решения ЗН различными методами от размерности входных данных. Сравнивались четыре метода решения ЗН: метод потенциалов, венгерский алгоритм, алгоритм Кана-Мункреса и рекуррентный метод. Наилучшие результаты показал рекуррентный метод, а наихудшие – метод потенциалов.

Литература

1. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
2. Левченко А.В. Быстрый алгоритм решения задачи о назначениях для нахождения нижней границы стоимости маршрута коммивояжера / А.Ю. Левченко, А.В. Морозов, А.В. Панишев // Искусственный интеллект. – 2011. – Вып. 4. – С. 406-416.