Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.85

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА И ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

***А. И. Косолап**, д.ф.-м.н., профессор,*
Украинский государственный химико-технологический университет, anivkos@ua.fm

Метод точной квадратичной регуляризации (EQR) преобразует общую задачу глобальной оптимизации к максимизации квадрата нормы вектора на выпуклом множестве (MNCC) [1]. Решение задачи MNCC однозначно определяет точку глобального экстремума исходной многоэкстремальной задачи. В работе рассматриваются преобразования пространства, после которых задача MNCC становится одноэкстремальной, тогда ее решение может быть найдено эффективным прямо-двойственным методом внутренней точки [2].

Если выпуклое множество S задачи MNCC является прямоугольным параллелепипедом, то эта задача многоэкстремальная, но ее решение сводится к выпуклой задаче максимизации линейной функции на параллелепипеде [1]. Линейная функция однозначно определяется центром параллелепипеда. Покажем, что задача MNCC сводится к максимизации линейной функции и для более сложной структуры выпуклого множества S.

Рассмотрим задачу

$$\max\{\|x\|^2 \mid x \in S \subseteq E_+^n\}, \tag{1}$$

где S – выпуклое множество, а x – искомый n-мерный вектор.

Теорема 1. *Пусть* $S \subseteq B = \{x \mid \|x-c\|^2 \le r^2\}$ *и* x^* *– решение задачи* (1), *тогда* x^* *также решение выпуклой задачи*

$$\max\{c^T x \mid x \in S\},$$

если $\|x^* - c\|^2 = r^2$.

Теоремой 1 легко воспользоваться для центрально симметричных множеств S, но, в общем случае, построение описанного шара B для S является сложной проблемой.

Ниже рассматривается преобразование евклидового пространства E^n, при котором задача MNCC становится одноэкстремальной. Покажем это на простом примере

$$\max\{\| x\|^2 | 2x_1 + x_2 \le 1, x \ge 0\}. \qquad (2)$$

В этой задаче два локальных максимума (0,5; 0) и (0; 1), где (0; 1) – точка глобального максимума. Используем линейное преобразование $z = x + 1$, тогда задача (2) примет вид

$$\max\{\| z-1\|^2 | 2(z_1-1)+(z_2-1) \le 1, z \ge 1\}. \qquad (3)$$

Методом EQR преобразуем задачу (3) к максимизации квадрата нормы вектора на выпуклом множестве, получим задачу

$$\max\{\| z\|^2 | -\| z-1\|^2 +3+2\| z\|^2 \le d,\ 2z_1+z_2 \le 4, z \ge 1\}, \qquad (4)$$

где значение d выбираем минимальным из условия $3\| z\|^2 = d$. Покажем, что задача (4) является одноэкстремальной. Найдем минимум нормы вектора на прямой $2z_1 + z_2 = 4$, он достигается в точке (1,6; 0,8), которая будет недопустимой для задачи (4). Следовательно, вдоль этой прямой норма вектора будет монотонно возрастать от точки (1,6; 0,8) до точки (0; 1) (поэтому точка (0,5; 0) уже не будет точкой локального максимума нормы вектора).

Рассмотрим общий случай, когда выпуклое множество S является многогранником P. Будем использовать линейное преобразование евклидового пространства $z = x + h$. Обозначим преобразованный многогранник через P^* и вектор $e = (1,...,1)$. Покажем, что существует такое $h > 0$, что преобразованная задача (1) становится одноэкстремальной. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $x^1 + h, x^2 + h$ *– две соседние вершины многогранника* P^* *не принадлежащие гиперплоскости* $e^T x = b$, *тогда существует такое* $h > 0$, *что функция* $\| x\|^2$ *вдоль ребра* $[x^1 + h, x^2 + h]$ *будет строго монотонной.*

Лемма 2. *Пусть* $x^1 + h, x^2 + h, x^3 + h$ *– три вершины многогранника* P^* *не лежащие в одной гиперплоскости* $e^T x = b$, а $x^1 + h$ *– точка глобального максимума* $\| x\|^2$ *и вдоль отрезка*

$[x^2 + h, x^1 + h]$ $[z^2 + h, z^1 + h]$ *функция* $\| x \|^2$ *монотонно возрастает, тогда вершина* $x^3 + h$ *не может быть точкой локального максимума* $\| x \|^2$.

Теорема 2. *Если выполняются условия леммы* 2, *то задача* (1) *будет одноэкстремальной*.

При доказательстве используется тот факт, что минимум нормы вектора на смещенном отрезке

$$\{x \mid x = (1-\alpha)(x^1 + h) + \alpha(x^2 + h), 0 \le \alpha \le 1\}$$

достигается при

$$\alpha = -\frac{(x^1 + h)^T (x^2 - x^1)}{\| x^2 - x^1 \|^2}$$

и при увеличении h норма вектора монотонна вдоль отрезка $[x^1 + h, x^2 + h]$.

В том случае, когда одна з граней многогранника P совпадает с гиперплоскостью $e^T x = b$, преобразуем систему координат $x = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

тогда, при соответствующем выборе a_i, многогранник P не будет содержать граней, совпадающих с $e^T z = q$. Например, задача

$$\max\{\| x \|^2 \mid x_1 - 2x_2 \le 0, -3x_1 + x_2 \le 0.5, x_1 + x_2 \le 1, x \ge 0\}$$

после линейных преобразований $x_1 = z_1, x_2 = 2z_1 + z_2$, $y = z + 4$ и EQR, становится одноэкстремальной.

Учитывая то, что любое выпуклое множество с любой наперед заданной точностью аппроксимируется многогранником, теорема 2 будет справедлива и для любого выпуклого множества.

Алгоритм решения задачи (1).

Шаг 1. Преобразуем задачу (1) линейным преобразованием $z = x + h$.

Шаг 2. Методом EQR преобразуем полученную задачу к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве.

Шаг 3. Решим преобразованную задачу прямо-двойственным методом внутренней точки. Сохраним найденное решение. Если это решение совпадает с ранее сохраненным, то найдено решение задачи (1).

Шаг 4. Преобразуем задачу (1) линейным преобразованием $x = Az$ и увеличим значение h, перейдем к шагу 1.

Пример. Найти $\max\{\| x\|^2 | a^T x \le 1, x \ge 0\}$, где $a_1 = 1, a_i = 1{,}01;$. $i = 2,...,100$ (заметим, что гиперплоскость $a^T x = 1$ близкая к $e^T x = b$). В этой задаче 100 локальных максимумов. Максимум нормы на гиперплоскости $a^T(z-10) = 1, h = 10$ достигается в точке (9,911766; 10,01088 … 10,01088), которая не удовлетворяет условию $z \ge h$. Следовательно, норма вектора монотонна на допустимом множестве преобразованной задачи

$$\max\{\| z\|^2 | -\| z-10\|^2 + s + (r-1)\| z\|^2 \le d, a^T(z-10) = 1, z \ge 10\}$$

и эта задача – одноэкстремальная.

Таким образом, показано, что простым преобразованием евклидового пространства многоэкстремальные задачи преобразуются к одноэкстремальным.

Литература

1.Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. – Дн-ск.: Наука и образование, 2013. – 316 с.

2. Nocedal J. Numerical optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p.