Українська Федерація Інформатики
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 517.3

ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕННЯ НЕВЛАСНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО СИНУСА

***О. С. Мельниченко**, к. ф.-м. н., професор*
***Д. О. Гальченко**, асистент*
Полтавський національний педагогічний університет ім. В. Г. Короленка
galchenko_dmitriy@ukr.net

Інтегральний синус є спеціальною функцією, яка визначається інтегралом $\int \frac{\sin(x)}{x}dx$ і не виражається через елементарні функції [2]. Ця функція позначається $Si(x)$ і була введена італійським математиком Л. Маскероні в 1790 р, однак, ще у 1781 році Л. Ейлеру було відомо, що $Si(\infty) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$. Даний інтеграл є найпростішим прикладом збіжного, але не абсолютно збіжного невласного інтегралу.

Виконаємо обчислення інтегралу

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx. \tag{1}$$

Спочатку розглянемо інтеграл

$$I = \int\limits_0^{b} \frac{\sin x}{x}dx, \tag{2}$$

який обчислюється в [1] розкладанням функції $y = \sin x$ у ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Тоді $I(b) = \int\limits_0^{b} \frac{\sin x}{x}dx =$

$$=\left.\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}\right)\right|_0^b \qquad (3)$$

У якості прикладу, представлено обчислення інтегралу

$$\mu=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

Доводиться, що у такому випадку достатньо взяти п'ять членів розкладу (3). У результаті одержимо

$$\mu=1,852\pm 0,001.$$

Зрозуміло, що при $b\to\pi$ для точного значення обчислення інтегралу (2) необхідно знайти значно більше членів ряду (3).

Для обчислення інтегралу (1) цей метод слід використовувати досить обережно, оскільки

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{\sin x}{x}dx. \qquad (4)$$

У [1] для обчислення пропонується наступний метод.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{A}\frac{\sin x}{x}dx+\int_A^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx, \qquad (5)$$

$$I=I_1+I_2=\int_0^{A}\frac{\sin x}{x}dx+\int_A^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx. \qquad (6)$$

Обчислення інтегралу I_1 виконується за допомогою формули Сімпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{n-1/2}\right)+R_n, \quad (7)$$

де n – кількість інтервалів, на які ділиться відрізок $[a;b]$, $y_{i/2}$ – значення функції в середній точці i-го інтервалу,

$$R_n=-\frac{(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4}f^{IV}(\xi),\ (a\le\xi\le b).$$

Якщо покласти $A=2\pi$, то отримаємо $I_1\approx 1,4182$ з точністю до четвертого знаку, $n=20$, $|R|<0,0012$.

Відшукання інтегралу I_2 здійснюємо методом інтегрування за частинами

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = -\int \frac{d\cos x}{x} = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\cos x dx}{x^2} = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{d\sin x}{x^2} =$$

$$= -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + \int \sin x d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} - \int \frac{\sin x}{x^3}dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\int \frac{d\cos x}{x^3} = -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + 6\int \frac{\cos x}{x^4}dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + 6\int \frac{d\sin x}{x^4} = \ldots =$$

$$= -\frac{\cos x}{x} + 2!\frac{\cos x}{x^3} - 4!\frac{\cos x}{x^5} + 6!\frac{\cos x}{x^7} - \ldots + (-1)^n (2n-2)!\frac{\cos x}{x^{2n-1}} + \ldots$$

$$-\frac{\sin x}{x^2} + 3!\frac{\sin x}{x^4} - 5!\frac{\sin x}{x^6} + \ldots + (-1)^n (2n-1)!\frac{\sin x}{x^{2n}} + \ldots$$

Отже,

$$I_n(x) = -\cos x\left(\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \frac{6!}{x^7} + \frac{8!}{x^9} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{x^{2n-1}}\right) -$$

$$-\sin x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!}{x^{2n}}\right) \qquad (8)$$

При $A = 2\pi$ отримаємо

$$I_n(2\pi) = \frac{1}{2\pi} - \frac{2!}{(2\pi)^3} + \frac{4!}{(2\pi)^5} - \frac{6!}{(2\pi)^7} + \frac{8!}{(2\pi)^9} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(2\pi)^{2n-1}}.$$

Якщо взяти у цьому розкладі всього три члени, то отримаємо

$$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{(2\pi)^3} + \frac{24}{(2\pi)^5} + 720\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^7}dx =$$

$$= 0{,}15354 + 720\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx \qquad (9)$$

Звідки, $1{,}5702 < I < 1.5752$. Точне значення $I = \frac{\pi}{2} = 1.5707\ldots$ [2].

Повернемося до аналізу формули (8).

Постає питання: чи можна використовувати дану формулу при довільному значенні n? Функціональні ряди, які стоять при $\cos x$ та $\sin x$ є знакозмінними.

Позначимо $u_n = \dfrac{(2n-2)!}{x^{2n-1}}$, тоді $u_{n+1} = \dfrac{(2n)!}{x^{2n+1}}$. За ознакою Даламбера маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-2)(2n-1)}{x^2} = \infty$$

при будь-якому значенні $x \neq \infty$.

Тому, за ознакою Даламбера, ці ряди є збіжними.

При $n=5$, $x=2\pi$ маємо

$$u_5 = \frac{8!}{(6,283)^9} = \frac{40320}{1,526\cdot10^7} = \frac{0,4\cdot10^5}{1,526\cdot10^7} = 2,621\cdot10^{-3}.$$

При $n=8$, $x=2\pi$ маємо

$$u_8 = \frac{880,56\cdot10^8}{9,387\cdot10^{11}} = \frac{8,806\cdot10^{10}}{9,387\cdot10^{11}} = \frac{8,806}{93,87} = 0,94.$$

При $n=10$, $x=2\pi$ маємо $u_{10} = 27,04$ і т.д.

Це говорить про те, що u_n зростає при збільшенні величини n.

Постає питання: що робити, коли у формулі (9) потрібно отримати значення $\int\limits_{2\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ з точністю більшою, ніж три знаки після коми; який алгоритм дій потрібно виконати для обчислення, наприклад, з точністю 10^{-7} інтегралу $\int\limits_0^{50}\frac{\sin x}{x}dx$?

Уведемо позначення $I(50) = \int\limits_0^{50}\frac{\sin x}{x}dx$. Для малих значень x використовуємо формулу Сімпсона з похибкою $\varepsilon < 10^{-7}$. Вище було показано як використовується метод Сімпсона із заданою точністю. Тоді

$$I\ \ 50\ \ = \int_0^b \frac{\sin x}{x}dx + \int_b^{50} \frac{\sin x}{x}dx = I_1\ \ b\ \ + I_2\ \ b\ \ .$$

Вважаємо $I_1\ \ b$ вже відомим з заданою точністю ε. Нехай $b = 10$, тоді з вище представлених формул знаходимо при $\varepsilon = 10^{-7}$

$$\frac{10^5}{180 \cdot\ \ 2n\ \ ^4} < 10^{-7}.$$

Звідки $n = 42$.

Використовуючи формулу (8) можемо досягти точність $\varepsilon < 10^{-7}$ для I_2

$$\frac{2n-2\ \ !}{10^{2n-1}} = \text{ при } n = 6\ \ = \frac{7,93 \cdot 2.5 \cdot 10^3}{10^{11}} = 1,97 \cdot 10^{-7}.$$

Таким чином, щоб досягти точності ε при обчисленні інтеграла $\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx$ необхідно вибирати окремо число інтервалів n за формулою для похибки методу Сімпсона і окремо число членів ряду (8) з нерівності

$$\frac{2n-2\ \ !}{x^{2n-1}} < \varepsilon.$$

Оскільки ряд (8) є розбіжним, то потрібно операцію з вибором числа n виконувати обережно.

Література

1. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные фунции. Преобразование Лапласа / П. И. Романовский. – М.: Наука, 1973. – 336 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – т. II. – М.: Наука, 1970. – 808 с.