Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.8

ЗАДАЧА РОЗКЛАДУ ДЛЯ ОДНОГО ПРИЛАДУ З ФУНКЦІЄЮ МІНІМІЗАЦІЇ ЧАСУ ОБСЛУГОВУВАННЯ ВСІХ ЗАВДАНЬ

***М. В. Леонова**, пошукач*
Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г.Короленка
Mariay2604@rambler.ru
***О. О. Ємець**, д. ф.-м. н., професор*
Полтавський університет економіки і торгівлі
yemetsli@mail.ru

Задачі впорядкування виникають всюди, де існує можливість вибору певної черговості виконання робіт: при розподілі робіт на виробництві, формування черговості виконання програм в обчислювальному центрі, організація відпочинку у вихідні дні тощо [1-5]. Ця задача, при порівняно невеликому проміжку часу, наявності досвіду і невеликій похибці, може розв’язуватися ефективно. Проте часто задача складання розкладу є складною. Тому актуальним є дослідження таких задач та розробка методів складання розкладу.

Однією з найбільш важливих задач такого типу є задача розкладу одного приладу. Вона розглядається зокрема у працях Коффмана Є. Г., Танаєва Е. Г., Згуровського М. З., Павлова О. А., Шкурби В. О. тощо [1-5]. Мета розв’язання задачі полягає в тому, щоб при заданих властивостях завдань та ресурсів і накладених на них обмеженнях знайти ефективний алгоритм упорядкування завдань, що оптимізує бажану міру ефективності. Як основні міри ефективності визначаються довжина розкладу і середній час виконання завдань. Моделі цих задач є детермінованими в тому сенсі, що вся інформація, на основі якої приймаються рішення про впорядкування, відома заздалегідь.

Нехай маємо множину завдань з номерами J_k. Завдання з номером i має час очікування r_i, коли воно не доступне для обробки, $r_i \geq 0$. Тобто ці величини утворюють мультимножину $R = \{r_1, ..., r_k\}$. Оскільки $p = p_1 = 1$, то час p_i обробки завдання з номером *i* є однаковим для всіх завдань. Маємо $w = w_1$, вага всіх завдань теж є однаковою одиничною – $w_i = 1$. Цільова функція F означає, що необхідно визначити розклад, на якому буде досягатися мінімальний час обслуговування всіх завдань.

Розглянемо допустимий розв'язок – порядок виконання завдань. Тоді, очевидно, кожен допустимий розв'язок такої задачі є впорядкованою *k*-вибіркою з номерів величин r_i згідно їх розташування в перестановці X з загальної множини перестановок $E_{kn}(R)$ [6]: $x \in (x_1, ..., x_k) \in E_{kn}(R)$, де n – кількість різних елементів в R, а x_i – час очікування завдання, що виконується *i*-тим.

Часом початку виконання завдання, що виконується першим, є $y_1 = x_1$, часом його завершення – $y_1 + 1$.

Часом початку виконання завдання, що виконується другим, є максимальне значення із x_2 та $y_1 + 1$, тобто $y_2 = \max\{x_2, y_1 + 1\}$, а часом закінчення – $y_2 + 1$.

Аналогічно часом початку виконання завдання, що виконується *k*-тим, є $y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + 1\}$, часом завершення – $y_k + 1$.

Маємо цільову функцію, що мінімізує час завершення обслуговування $y_k + 1$, що рівносильне мінімізації часу початку останнього завдання:

$$F = y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + 1\} \to \min$$

за умови виконання наступних співвідношень:

$$y_1 = x_1;\ \ y_i = \max\{x_i, y_{i-1} + 1\};\ \forall\, i \in J_k \setminus \{1\},$$

та за умови $x \in (x_1, ..., x_k) \in E_{kn}(R)$.

Розглянемо умови задачі

$y_1 = x_1;\ y_2 = \max\{x_2, y_1 + 1\} = \max\{x_2, x_1 + 1\};$

$$y_3 = \max\{x_3, y_2 + 1\} = \max\{x_3, \max\{x_2, x_1 + 1\} + 1\} = \max\{x_3, x_2 + 1, x_1 + 2\};$$

і так далі. Загальна формула:

$$y_j = \max\{x_j, x_{j-1} + 1, x_{j-2} + 2, ..., x_1 + (j-1)\} \quad \forall j \in J_k \setminus \{1\}.$$

Тобто ми довели таке твердження.

Лема. Умови на допустимий розв’язок (порядок виконання завдань) в задачі Z_1 вигляду

$$y_1 = x_1; \;\; y_i = \max\{x_i, y_{i-1} + 1\} \;\; \forall i \in J_k \setminus \{1\}.$$

еквівалентні таким:

$$y_1 = x_1; \;\; y_i = \max\{x_i, x_{i-1} + 1, x_{i-2} + 2, ..., x_1 + (i-1)\}.$$

Покажемо, що задачу Z_1 можна розв’язати поліноміальним алгоритмом.

Алгоритм одержання одного із можливих оптимальних розв’язків задачі визначає таке твердження.

Твердження 1. Оптимальним розв’язком задачі Z_1 знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією часу завершення виконання останнього завдання є упорядкування $\sigma = (i_1, ..., i_k)$ завдань згідно упорядкуванню по неспаданню елементів перестановок $X = (r_{i_1}, ..., r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$,

$$r_{i_1} \le r_{i_2} \le ... \le r_{i_k}, \qquad (1)$$

де $R = \{r_1, ..., r_k\}$ – мультимножина часів очікування завдань.

Доведення. Доведемо правильність твердження методом математичної індукції.

1. Перевіримо правильність твердження для випадку двох елементів в R $(k = q = 1,\ k = q = 2)$.

Візьмемо два перших елемента множини $R = \{r_1, ..., r_k\}$, потрібно довести, що упорядкування елементів у розв’язку $X_2 = (r_1, r_2)$ є більш ефективним, ніж $X_2' = (r_2, r_1)$ за умови $r_1 \le r_2$. Нагадаємо, що час виконання завдання $p_i = 1\ \forall i \in J_k$.

Якщо перестановка, що дає розв’язок є $X_2 = (r_1, r_2)$, то маємо такі випадки:

1) $y_1+1>r_2$, тоді початок виконання другого завдання $y_2=y_1+1$, а завершення $y_2+1=y_1+2=r_1+2$.

2) $y_1+1\le r_2$, тоді початок виконання другого завдання $y_2=r_2$, а завершення $y_2+1=r_2+1$.

Якщо розв’язком є $X_2' = \ r_2,r_1\ $, то початок виконання другого завдання $y_2'=r_2+1$ (оскільки $r_1\le r_2$), а завершення $y_2'+1=r_2+2$.

В будь-якому випадку $y_2'\ge y_2$, оскільки $r_2+2\ge r_1+2$ і $r_2+2>r_2+1$. Отже, упорядкування елементів у розв’язку $X_2 = \ r_1,r_2\ $, що дає перестановка $\sigma_2 = \ 1,2\ $ є більш ефективним, ніж розв’язок $X_2' = \ r_2,r_1\ $, що дає перестановка $\sigma_2' = \ 2,1\ $.

2. Припустимо, що твердження виконується для випадку, коли з *R* вибирається *s* елементів $k=q=s$.

3. Доведемо, що виконується для $k=q=s+1$. Маємо два способи упорядкування елементів розв’язку $X_{s+1} = \ r_1,...,r_s,r_{s+1}$ та $X_{s+1}' = \ r_1',...,r_s',r_{s+1}'\ $,

$$y_s \le y_s'. \qquad (2)$$

Потрібно довести, що $y_{s+1}\le y_{s+1}'$.

$$y_{s+1}=\max\ r_{s+1},y_s+1\ =\begin{cases} r_{s+1}, r_{s+1}>y_s+1,\\ y_s+1, r_{s+1}\le y_s+1.\end{cases}$$

$$y_{s+1}'=\max\ r_{s+1}',y_s'+1\ =\begin{cases} r_{s+1}', r_{s+1}'>y_s'+1,\\ y_s'+1, r_{s+1}'\le y_s'+1.\end{cases}$$

Розглянемо всі можливі випадки розв’язків, перебравши три співвідношення між r_{s+1}, r_{s+1}' та значення максимумів для y_{s+1}, y_{s+1}', позначимо комбінації останніх: 1-1; 1-2; 2-1; 2-2.

1) Нехай $\underline{r_{s+1}=r_{s+1}'}$. (3)

1-1. $y_{s+1}=r_{s+1}$, $y_{s+1}'=r_{s+1}'$. За умовою (3) $y_{s+1}=y_{s+1}'$;

1-2. $y_{s+1} = r_{s+1},\ y'_{s+1} = y'_s + 1$. Оскільки $y'_s + 1 \geq r'_{s+1} = r_{s+1}$, то $y_{s+1} \leq y'_{s+1}$;

2-1. $y_{s+1} = y_s + 1,\ y'_{s+1} = r'_{s+1}$. Цей випадок є можливим тільки якщо $y_{s+1} = y'_{s+1}$, оскільки $\begin{cases} y_s + 1 \geq r_{s+1} \\ y'_s + 1 < r'_{s+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_s \geq r_{s+1} - 1 \\ y'_s < r'_{s+1} - 1 \end{cases} \Rightarrow y_s \geq y'_s$, що за умови (2) можливо лише при $y_{s+1} = y'_{s+1}$;

2-2. $y_{s+1} = y_s + 1,\ y'_{s+1} = y'_s + 1$. Враховуючи умову (2), маємо $y_{s+1} \leq y'_{s+1}$.

2) Нехай $\underline{r_{s+1} > r'_{s+1}}$. (4)

1-1. $y_{s+1} = r_{s+1},\ y'_{s+1} = r'_{s+1}$. Якщо $r_{s+1} > r'_{s+1}$, то це означає, що $r'_{s+1} \in \ r_1, r_2, ..., r_s$. Отже в послідовності $r'_1, r'_2, ..., r'_s$ є хоча б один член із множини $r_{s+1} \leq ... \leq r_k$. Нехай це буде деяке r_i $r_i \geq r_{s+1}$,це означає, що значення функції $y'_{s+1} > r_i \geq r_{s+1}$. Звідси слідує, що $y_{s+1} \leq y'_{s+1}$;

1-2. $y_{s+1} = r_{s+1},\ y'_{s+1} = y'_s + 1$. Цей випадок є аналогічним до попереднього.

2-1. $y_{s+1} = y_s + 1,\ y'_{s+1} = r'_{s+1}$. Цей випадок є неможливим, оскільки $y_s + 1 \geq r_{s+1} > r'_{s+1} > y'_s + 1 \Rightarrow y_s + 1 > y'_s + 1$, що суперечить умові (2);

2-2. $y_{s+1} = y_s + 1,\ y'_{s+1} = y'_s + 1$. Враховуючи умову (2), маємо $y_{s+1} \leq y'_{s+1}$.

3) Нехай $\underline{r_{s+1} < r'_{s+1}}$. (5)

1-1. $y_{s+1} = r_{s+1},\ y'_{s+1} = r'_{s+1}$. За умовою (5) $y_{s+1} < y'_{s+1}$;

1-2. $y_{s+1} = r_{s+1},\ y'_{s+1} = y'_s + 1$. Оскільки $y'_{s+1} = y'_s + 1 \geq r'_{s+1} > r_{s+1} = y_{s+1}$, то $y_{s+1} < y'_{s+1}$;

2-1. $y_{s+1} = y_s + 1,\ y'_{s+1} = r'_{s+1}$. Оскільки $y_{s+1} = y_s + 1 \leq y'_s + 1 < r'_{s+1} = y'_{s+1}$, то $y_{s+1} < y'_{s+1}$;

2-2. $y_{s+1} = y_s + 1,\ y'_{s+1} = y'_s + 1$. Враховуючи умову (2), маємо $y_{s+1} \le y'_{s+1}$.

Отже, твердження доведено методом математичної індукції.

Розглянемо приклад задачі складання розкладу для одного приладу. Нехай маємо множину завдань з номерами J_k та мультимножину $R = \ 2,0,5,5,3\ $. Розглянемо два можливі розв’язки цієї задачі $X = \ 0,2,3,5,5\ $ та $X' = \ 2,0,5,5,3\ $. У першому випадку: $y_1 = 0;\ y_2 = \max\ 2,1\ = 2;\ y_3 = \max\ 3,3\ = 3;$

$y_4 = \max\ 5,4\ = 5; y_5 = \max\ 5,6\ = 6;$

У другому: $y'_1 = 2;\ y'_2 = \max\ 0,3\ = 3;\ y'_3 = \max\ 5,4\ = 5;$

$y'_4 = \max\ 5,6\ = 6; y'_5 = \max\ 3,7\ = 7;$

Отже, у першому випадку час завершення останнього завдання менший, ніж у другому. Що і підтверджує на практиці правильність твердження 1.

В статті нами був запропонований один із способів розв’язання задачі розкладу одного предмету – поліноміальний алгоритм.

Література

1. Коффман Э.Г. Теория расписаний и вычислительные машины. – М.: Наука. – 1984. – 336 с.
2. Танаев В.С. Введение в теорию расписаний / С.В. Танаев, В.В. Шкурба. – М.: Наука. – 1975. – 257 с.
3. Згуровский М.З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография / М.З. Згуровский, А.А. Павлов.– К.: Наукова думка. – 2010.– 573 с.
4. Шерешик Н.Ю. Полиэдральные свойства задачи обслуживания различных требований одним прибором / Н.Ю. Шерешик// Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, ИСЭМ СО РАН. – 2014. – С. 96

5. Brucker P. Complexity Results for Scheduling Problems / Peter Brucker, Sigrid Knust. – Режим доступу URL: www//mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class.

6. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець – Київ: Інститут систем досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487