Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 517.6

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ СПЛАЙНИ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ НА ТРИКУТНИКУ ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПЛАСТИН

І. С. Томанова, *магістр, аспірант*
Українська інженерно–педагогічна академія
tomanova.iryna@gmail.com

Сплайни мають численні застосування як в математичної теорії, так і в різноманітних обчислювальних додатках. Основними достоїнствами сплайн-інтерполяції є її стійкість і мала трудомісткість.

Використання сплайнів для дослідження бігармонійної задачі широко використовується на практиці, зокрема при дослідженні прогину пластин. Пластини дуже широко використовуються на практиці в будівництві, а також у машино будівничій сфері та інших галузях промисловості. Але використання сплайнів 5-го степеня на практиці не досліджувалося у зв'язку з відсутністю явних формул для таких сплайнів на трикутній сітці вузлів. В роботах Сергієнко І. В., Литвина О. М., Литвина О. О., Денисової О. І. [1] запропоновані явні формули для сплайнів 5-го степеня.

Для полінному 5-того степеня

$$P_5(x,y)=\sum_{0\le|\beta|\le5} a_\beta x^{\beta1} y^{\beta2} \ , |\beta| = \beta_1+\beta_2 , \beta=(\beta_1,\beta_2)$$

доведено, що вимоги

$$D^\alpha f(A_i) = D^\alpha P_5(A_i) , i=\overline{1,3} , \ 0\le|\alpha|\le 2 , D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}} ,$$

де $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2 , \alpha=(\alpha_1,\alpha_2) , \left.\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}} = \left.\frac{\partial P5}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}}$,

$(i,j)\in\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$,

υ_{ij} – нормаль до сторони, що з'єднує вершини A_i та A_j достатні для знаходження всіх коефіцієнтів полінома 5-го степеня.

Функції у точках

$$h_{k\beta}(x,y)=\frac{(x-x_k)^{\beta_1}(y-y_k)^{\beta_2}}{\beta_1!\,\beta_2!}\,\omega_{ij}^3(x,y)\{\frac{1}{\omega_{ij}^3(x,y)}\}_{(x_k,y_k)}^{(2-|\beta|)},$$

$$\omega_{ij}(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix}.$$

Похідна по внутрішній нормалі υ_{ij} визначається формулою:

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}=\frac{sign(\Delta_{kij})}{|A_i,A_j|}[(y_i-y_j)\frac{\partial f}{\partial x}-(x_i-x_j)\frac{\partial f}{\partial y}],$$

$$|A_iA_j|=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2},\ \Delta_{kij}=\begin{vmatrix} x_k & y_k & 1\\ x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix}.$$

Функції

$$H_{ij}(x,y)=\frac{\omega_{ik}^2(x,y)\omega_{jk}^2(x,y)\omega_{ij}(x,y)sing(\Delta_{kij})}{\omega_{ik}^2(x_{ij},y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij},y_{ij})|A_iA_j|},$$

$$\text{де }\ \omega_{ik}(x,y)=\begin{vmatrix} x-x_k & y-y_k & 0\\ x_i-x_k & y_i-y_k & 0\\ x_k & y_k & 1\end{vmatrix}.$$

Для кожної функції $f(x,y)\in C^2(\overline{T}_{ijk})$ оператор

$$S_5 f(x,y)=w(x,y)+\sum_{(i,j)\in Q}[\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}-\frac{\partial w}{\partial \upsilon_{ij}}]\Big|_{M_{ij}}H_{ij}(x,y),$$

де

$$w(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2}D^{\beta}f(A_i)h_{i\beta}(x,y).$$

визначає поліном 5-того степені. Для розв'язання задачі про згин жорстко опертої пластини беремо багатокутну область. Ділимо область на трикутники. Знаходимо сплайн на кожному трикутнику. Інтегруємо сплайни по трикутниках та сумуємо їх і невідомі параметри знаходимо з умови мінімуму відповідного функціоналу.

Для розв'язання задачі про згин жорстко опертої пластини беремо багатокутну область. Ділимо область на трикутники. Знаходимо сплайн на кожному трикутнику. Інтегруємо сплайни по трикутниках та сумуємо їх і невідомі параметри знаходимо з умови мінімуму відповідного функціоналу.

Для прикладу розглянемо квадрат з вершинами $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(1,1)$, $A_4(0,1)$. Розділимо область на два трикутника, перший трикутник з вершинами $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(1,1)$, другий трикутник з вершинами $A_1(0,0)$, $A_3(1,1)$, $A_4(0,1)$.

Функція $f[x,y] = (x*y(1-x)*(1-y))^2*(1+x-y)$.

Сплайн на першому трикутнику дорівнює:

$$S1_5\ f(x,y) = \frac{1}{16}*(-1+x)^2(x-y)y^2.$$

Сплайн на другому трикутнику дорівнює:

$$S2_5\ f(x,y) = \frac{1}{16}*x^2(x-y)(-1+y)^2.$$

Максимальне відхилення дорівнює:

$$f[x,y] - S_5 f[x,y] = 0.00390625$$

Література

1. Сергиенко И. В, Литвин О. Н., Литвин О. О., Денисова О. И. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике. – Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Том 50, № 5. – С. 17-33