Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 532.546:539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО СТАНУ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ ЗА НАЯВНОСТІ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСУ

О. О. Марченко, *к. ф.-м. н., ст. наук. співр.,*
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України
Т. А. Самойленко, *к. ф.-м. н., наук .співр.,*
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Запропоновано дослідження динамічного стану ґрунтової гідротехнічної споруди з урахуванням процесу перенесення солей при неізотермічному режимі звести до розгляду наступної початково-крайової задачі для квазілінійної параболо-гіперболічної системи, яка у плоскому випадку має вигляд [1,2]:

$$
\begin{aligned}
& c_T \frac{\partial T}{\partial t} - div\left(k_1\left(x,T,C,W\right) grad\, T\right) = f_1\left(x,t\right), \\
& n \frac{\partial C}{\partial t} - div\left(k_2\left(x,T,C,W\right) grad\, C - vC\right) + \gamma\left(C - \tilde{c}\right) = 0, \\
& \frac{\partial W}{\partial t} - div\left(k_3\left(x,T,C,W,\theta\right) grad\, W\right) = f_2\left(x,t\right), \\
& \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left(AU\right)\left(x,T,C,W,U\right) + G\left(x,W\right) grad\, W = F\left(x,t\right),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

де $\left(x,t\right) \in \Omega_T$, $\Omega_T = \Omega \times \left(0,T\right]$, $x = \left(x_1,x_2\right)^T$, T – температура, C – об’ємна концентрація сольового розчину, W – об’ємна вологість, $U\left(x,t\right) = \left(u_1,u_2\right)^T$ – вектор зміщень скелету ґрунту, c_T – об’ємна теплоємність ґрунту, n – пористість, v – вектор швидкості фільтрації, $\tilde{c}$ – концентрація граничного насичення, ρ – щільність ґрунту, $\gamma = const > 0$, $\theta = \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2$, A – оператор теорії пружності з коефіцієнтами Ламе вигляду: $\lambda\left(x,T,C,W,U\right) = \lambda\left(x,T,C,W,\partial U/\partial x_1,\partial U/\partial x_2\right)$, $\mu\left(x,T,C,W,U\right) = \mu\left(x,T,C,W,\partial U/\partial x_1,\partial U/\partial x_2\right)$; $F\left(x,t\right) = \left(F_1,F_2\right)^T$.

Крайові умови – неоднорідні змішані. Початкові умови:

$T(x,0)=T_0(x)$, $C(x,0)=C_0(x)$, $W(x,0)=W_0(x)$, $U(x,0)=U_0(x)$, $(\partial U/\partial t)(x,0)=q_0(x)$.

Додатково припускаємо відомими: $(\partial T/\partial t)(x,0)=p_0^1(x)$, $(\partial C/\partial t)(x,0)=p_0^2(x)$, $(\partial W/\partial t)(x,0)=p_0^3(x)$, $x\in\overline{\Omega}$.

Тут k_1, k_2, k_3, G, λ, μ, f_i, F_i, $i=1,2$, T_0, C_0, W_0, $U_0=(u_0^1,u_0^2)^T$, $q_0=(q_0^1,q_0^2)^T$, p_0^1,p_0^2,p_0^3 – задані функції і вектор-функції достатньої гладкості.

Позначимо через Z множину вектор-функцій $w(x,t)=$ $=(T(x,t),C(x,t),W(x,t),U(x,t))^T$, які задовольняють головним крайовим умовам, компоненти яких разом з компонентами $\partial w/\partial t\ \forall t\in[0,T]$, $\partial^2 w/\partial t^2\ \forall t\in[0,T]$, $w(x,0)$ належать простору $W_2^1(\Omega)$, змішані похідні $\partial^2 w/\partial x_k\partial t=\partial^2 w/\partial t\partial x_k$ "майже скрізь" і належать $L_2(\Omega)$, $k=1,2$.

Слабку форму задачі запишемо на базі методу Гальоркіна [2]:

$$m(\partial^2 w/\partial t^2,z)+\overline{m}(\partial w/\partial t,z)+a(w;w,z)=\langle\tilde{F},z\rangle\quad\forall t\in[0,T],\qquad(2)$$

$$(w(x,0),z(x))=(\tilde{W}^0(x),z(x)),\qquad(3)$$

$$((\partial w/\partial t)(x,0),z(x))=(\tilde{W}^1(x),z(x))\quad\forall z\in Z_0,\qquad(4)$$

де

$$\tilde{W}^0(x)=(T_0(x),C_0(x),W_0(x),U_0(x))^T,$$

$$\tilde{W}^1(x)=(p_0^1(x),p_0^2(x),p_0^3(x),q_0(x))^T,$$

елементами множини Z_0 є вектор-функції $z(x)=(z_1(x),z_2(x),z_3(x),z_4(x))^T$, компоненти яких належать простору $W_2^1(\Omega)$ і задовольняють однорідним головним крайовим умовам.

Узагальненим розв'язком початково-крайової задачі для системи (1) є $w(x,t)\in Z$, яка задовольняє $\forall z(x)\in Z_0$ співвідношенням (2)-(4).

Запропоновано наближений розв’язок задачі Коші (2)-(4) шукати методом скінчених елементів у скінчено-вимірному підпросторі $Z^N \subset Z$. Схема Кранка-Ніколсона запишеться у вигляді:

$$\alpha^0 = \tilde{M}^{-1}\tilde{W}^0,\ d^0 = \tilde{M}^{-1}\tilde{W}^1,$$

$$\left(M + \frac{\tau}{2}\bar{M} + \frac{\tau^2}{4} A\left(\frac{\tilde{W}^{j+1} + \bar{W}^j}{2} \right) \right) d^{j+1} =$$

$$= \left(M - \frac{\tau}{2}\bar{M} - \frac{\tau^2}{4} A\left(\frac{\tilde{W}^{j+1} + \bar{W}^j}{2} \right) \right) d^j -$$

$$-\tau A\left(\frac{\tilde{W}^{j+1} + \tilde{W}^j}{2} \right) \alpha^j + \frac{\tau}{2}\ \ \tilde{F}^{j+1} + \tilde{F}^j\ \ ,$$

$$\alpha^{j+1} = \alpha^j + \frac{\tau}{2}\ \ d^{j+1} + d^j\ \ , \quad \tilde{W}^{j+1}\ \ x\ \ = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i^{j+1} \Phi_i\ \ x\ \ ,\ j = \overline{0, J-1}.$$

Матриці $\tilde{M}$, M, $\bar{M}$, A – розріджені, блочно-діагональні, що дозволяє на кожному часовому кроці і на кожній ітерації розв’язувати послідовно окремо кожне рівняння системи (1).

В доповіді розглянуто нову математичну модель у формі початково-крайової задачі для квазілінійної параболо-гіперболічної системи рівнянь, сформульовано відповідну узагальнену задачу, побудовано обчислювальний алгоритм її розв’язання на базі методу скінчених елементів.

Література

1. Марченко О.А., Лежнина Н.А. Приближенное решение методом конечных элементов задачи влаготеплопереноса в промерзающих грунтах // Компьютерная математика. – 2002. – № 1. – С. 24 – 33.
2. Марченко О.А., Самойленко Т.А. Исследование приближеного решения квазилинейной параболо-гиперболической задачи // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – №5. – С. 142-154.