Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 517.956.6

КРАЙОВА ЗАДАЧА ІЗ ЗАГАЛЬНИМИ ДВОТОЧКОВИМИ НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАВРЕНТЬЄВА – БІЦАДЗЕ

Т. П. Гой, *к. ф.-м. н., доцент*
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
tarasgoy@yahoo.com
Я. І. Савка, *к. ф.-м. н., мол. н.с.*
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
s-i@ukr.net

Розроблення методів розв'язування крайових задач для рівнянь змішаного типу є однією з центральних проблем сучасної теорії диференціальних рівнянь. Інтерес до таких рівнянь пояснюється передовсім їхніми численними практичними застосуваннями у газовій динаміці, теорії нескінченно малих згинань поверхонь, у магнітній гідродинаміці, теорії електронного розсіювання, у прогнозуванні рівня ґрунтових вод, в математичній біології та інших областях [1, 2].

У прямокутній області $Q=\{(t,x)\colon t\in(0,T), x\in(-1,1)\}$ досліджуємо крайову задачу

$$u_{tt}+\operatorname{sgn} x\cdot u_{xx}=0, \tag{1}$$

$$u(t,\pm 1)=0,\ u(t,+0)=u(t,-0),\ u_x(t,+0)=u_x(t,-0), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} U_1[u]&\equiv a_{11}u(0,x)+a_{12}u(T,x)+b_{11}u_t(0,x)+b_{12}u_t(T,x)=\varphi_1(x),\\ U_2[u]&\equiv a_{21}u(0,x)+a_{22}u(T,x)+b_{21}u_t(0,x)+b_{22}u_t(T,x)=\varphi_2(x),\end{aligned} \tag{3}$$

де a_{ij}, $b_{ij}\in\mathbf{R}$, φ_1, $\varphi_2\in L_2(-1,1)$, а форми $U_1[u]$, $U_2[u]$ – лінійно незалежні.

Розв’язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \tag{4}$$

де $X_k(x)$ – власні функції задачі на власні значення

$$X''(x) = -\lambda \operatorname{sgn} x \cdot X(x),$$
$$X(-1) = X(+1) = 0, \quad X(-0) = X(+0), \quad X'(-0) = X'(+0), \tag{5}$$

Система $\{X_k(x)\}_{k\geq 1}$ є повною ортогональною у просторі $L_2(-1,1)$. Відомі вигляд функцій $X_k(x)$ і асимптотика власних значень задачі при $k \to +\infty$ [1]. Позначимо через $X_k^+(x)$ і $X_k^-(x)$ власні функції задачі (5), які відповідають власним значенням $\lambda_k^+ > 0$ і $\lambda_k^- < 0$ відповідно.

Запровадимо функціональні простори:

H_q, $q \in \mathbf{R}$, – простір функцій $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^+ X_k^+(x) + \psi_k^- X_k^-(x)$,

для яких скінченною є норма $\|\psi\|_{H_q}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^+|^{2q} \ |\psi_k^+|^2 + |\psi_k^-|^2$, де $\psi_k^{\pm} =$ $\operatorname{sgn} x \cdot \psi(x), X_k^{\pm}(x)$ – коефіцієнти Фур'є функції $\psi(x)$;

$C^2([0,T], H_q)$ – простір функцій $u(t,x)$, для яких

$$\|u\|_{C^2([0,T],H_q)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_{H_q} + \max_{t\in[0,T]} \|u_t(t,\cdot)\|_{H_q} + \max_{t\in[0,T]} \|u_{tt}(t,\cdot)\|_{H_q} < +\infty.$$

Нехай функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ розвиваються в ряди, аналогічні до (4). Тоді для відшукання функцій $u_k^{\pm}(t)$ з (4) одержуємо нелокальну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^2 u_k^{\pm}(t)}{dt^2} - \lambda_k^{\pm} u_k^{\pm}(t) = 0, \quad U_1[u_k^{\pm}] = \varphi_{1k}^{\pm}, \; U_2[u_k^{\pm}] = \varphi_{2k}^{\pm}.$$

Теорема. *Для єдиності розв'язку задачі* (1) – (3) *у просторі* $C^2([0,T], H_q)$ *необхідно і достатньо, щоб для власних значень* $\lambda_k^{\pm}, k \in \mathbf{N}$, *справджувались нерівності*

$$\Delta_1(\lambda_k^+) \neq 0, \quad \Delta_2(\lambda_k^-) \neq 0,$$

де

$$\Delta_1(\lambda_k^+) = \begin{vmatrix} U_1[e^{(\lambda_k^+)^{1/2} t}] & U_1[e^{-(\lambda_k^+)^{1/2} t}] \\ U_2[e^{(\lambda_k^+)^{1/2} t}] & U_2[e^{-(\lambda_k^+)^{1/2} t}] \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(\lambda_k^-) = \begin{vmatrix} U_1[\cos|\lambda_k^-|^{1/2} t] & U_1[\sin|\lambda_k^-|^{1/2} t] \\ U_2[\cos|\lambda_k^-|^{1/2} t] & U_2[\sin|\lambda_k^-|^{1/2} t] \end{vmatrix}.$$

Якщо виконуються умови теореми 1, то вирази $\Delta_2(\lambda_k^-)$, $k \in \mathbf{N}$, які містяться у знаменниках для формул $u_k^-(t)$, суттєво впливають на збіжність ряду (4), бо можуть як завгодно близько наближатися до нуля для нескінченної кількості чисел $\lambda_k^-, k \in \mathbf{N}$. Тому існування розв'язку задачі (1) – (3) пов'язане з проблемою малих знаменників [3].

За допомогою метричного підходу встановлено, що умови коректної розв'язності задачі (1) – (3) у просторі $C^2([0,T], H_q)$ виконуються майже для всіх (стосовно міри Лебега в **R**) чисел $T > 0$.

Отримані нами результати узагальнюють результати робіт [4, 5], де досліджена коректність задачі (1) – (3) для окремих випадків нелокальних умов (3): $a_{12} = a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0$, $a_{11}b_{21} \neq a_{21}b_{11}$ і $a_{11} = a_{21} = b_{11} = b_{21} = 0$, $a_{12}b_{22} \neq a_{22}b_{12}$ відповідно.

Література

1. Егоров И. Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И. Е. Егоров, С. В. Попов, С. Г. Пятков. – Новосибирск : Наука, 2000. – 336 с.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М. : Высш. шк. – 1995. – 301 с.
3. Ільків В. С. Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників / В. С. Ільків, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 12. – С. 1624–1650.
4. Захаров П. Е. Нелокальная краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / П. Е. Захаров // Матем. заметки ЯГУ, 2005. – Т. 12, № 2. – С. 17–27.
5. Пинигина Н. Р. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа / Н. Р. Пинигина // Матем. заметки ЯГУ, 2010. – Т. 17, № 1. – С. 100–108.