Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.8

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА ЭЛЛИПСОИДОВ.

***П.И. Стецюк**, д. ф.-м. н., с. н. с.*
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
stetsyukp@gmail.com

Задача. На $R^n (n \ge 2)$ задано векторное поле $g(x), g(x) \in R^n$. Требуется найти точку x^*, такую, что $(g(x), x - x^*) \ge 0$ для всех $x \in R^n$. Предполагается, что x^* существует и $g(x) \ne 0$ для $x \ne x^*$.

Эту задачу решает метод эллипсоидов. Его можно представить как алгоритм с растяжением пространства, где коэффициент растяжения α такой, что $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}$ [1]. Общая схема метода эллипсоидов имеет следующий вид.

Инициализация. Выбираем точку $x_0 \in R^n$ и радиус $r_0 \in R^1$ такими, чтобы $\left\| B_0^{-1}(x_0 - x^*) \right\| \le r_0$, где B_0 – $n \times n$-матрица. Перейдем к очередной итерации со значениями x_0, r_0, B_0.

Итерационный процесс. Пусть на k-й итерации найдены $x_k \in R^n$, $r_k \in R^1$ и $n \times n$-матрица B_k. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполняем такие действия.

1. Вычислим $g_k = g(x_k)$. Если $g_k = 0$, то ОСТАНОВ($x^* = x_k$).

2. Вычислим очередную точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k, \ \textit{где} \ h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) r_k, \xi_k = \frac{B_k^T g_k}{\left\| B_k^T g_k \right\|}.$$

3. Пересчитаем матрицу B_{k+1} и радиус r_{k+1}

$$B_{k+1} := B_k + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) B_k \xi_k \ \xi_k^T, \quad r_{k+1} := \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) r_k.$$

4. Переходим к $(k+1)$-й итерации с x_{k+1}, r_{k+1} и B_{k+1}.

Теорема [1]. Генерируемая методом эллипсоидов последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\| B_k^{-1}(x_k - x^*) \right\| \le r_k, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{1}$$

а объем эллипсоида $E_{k+1} = \{x : \left\| B_{k+1}^{-1}(x_{k+1} - x) \right\| \le r_{k+1}\}$, локализующего точку x^*, уменьшается на постоянную величину, равную

$$q(n) = \frac{vol(E_{k+1})}{vol(E_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{2}$$

В теореме соотношение (2) означает, что метод эллипсоидов сходится (по объему локализации точки x^*) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q(n) < 1$. Величина знаменателя зависит от выбранного значения α при условии $\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}$. Наименьший знаменатель реализуется в методе эллипсоидов Юдина – Немировского – Шора. Ему соответствует коэффициент растяжения пространства $\alpha_1 = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$. Близкий к наименьшему знаменатель реализуется в приближенном методе эллипсоидов [2] и ему соответствует $\alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}$. При больших n знаменатели геометрической прогрессии в обоих методах аппроксимируются сверху величиной $q^*(n) = 1 - \frac{1}{2n}$.

Работа выполнена при поддержке НАНУ, проект № 0114U001055.

Литература

1. Стецюк П.И. Общая схема метода эллипсоидов. – Информационный бюллетень АМП № 13. – Екатеринбург: УрО РАН, 2015. – С. 59–60.
2. Стецюк П.И. Приближенный метод эллипсоидов // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 3. – С. 141–146.