Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.6

ЕФЕКТИВНІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНОГО ГІБРИДНОГО АЛГОРИТМУ ФАКТОРИЗАЦІЇ РОЗРІДЖЕНИХ МАТРИЦЬ

В. А. Сидорук, *молодший науковий співробітник*
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України
wolodymyr.sydoruk@gmail.com

Розглядається новий гібридний алгоритм розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими симетричними додатно-визначеними матрицями на комп’ютерах гібридної архітектури з багатоядерними (CPU) процесорами і графічними (GPU) прискорювачами.

Розглянемо задачу

$$\boldsymbol{Ax = b} \tag{1}$$

з симетричною додатно-визначеною розрідженою матрицею порядку *n*.

Суть гібридного алгоритму полягає в попередньому приведення вихідної матриці A до блочно-діагональної матриці з обрамленням $\tilde{\boldsymbol{A}}$ та наступній факторизації приведеної матриці [1,2].

Таким чином, задача розв’язування вихідної задачі (1) зводиться до розв’язування еквівалентної задачі

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \tag{2}$$

де $\tilde{x} = P^T x, \tilde{b} = P^T b$, P - ортогональна матриця перестановок.

Найбільш ефективним прямим методом розв’язання такої задачі є, як відомо, метод Холецького [1-3]. Розв'язання системи (2) полягає в розв’язанні підзадач: трикутне розвинення матриці системи (3), розв’язання двох СЛАР з трикутними матрицями (4) та (5):

$$\boldsymbol{\tilde{A} = \tilde{L} * \tilde{L}^T} \tag{3}$$

$$\tilde{L}y = \tilde{b} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\tilde{L}^T \tilde{x} = y} \tag{5}$$

Оскільки в загальному випадку складність наведеного алгоритму визначається в основному складністю трикутного розвинення матриці, наступні викладки будуть стосуватись саме етапу факторизації.

Розглянемо гібридний алгоритм LL^T-факторизації [4]. Припустимо, що кількість CPU і GPU, які використовуються однакова – p. Тоді для знаходження величини прискорення та ефективності паралельного алгоритму скористуємось наступними формулами:

$$S_p = T_1 / T_p, E_p = S_p / p,$$

де T_p – час розв'язування задачі на гібридному комп'ютері з використанням p CPU і p GPU, T_1 – час розв'язування тієї ж задачі на гібридному комп'ютері з одним CPU та одним GPU.

Враховуючи, що основна частина обчислень в алгоритмі реалізовуються на GPU, для обчислення часових характеристик можна використовувати наступні формули.

$$T_1 = Nt_g, T_g = Ntg + M_1 t_{opg} + M_2 t_{opp} + Q_1 t_{cpg} + Q_2 t_{cpg},$$

де N – кількість арифметичних операцій, t_g – середній час виконання однієї арифметичної операції на GPU, t_{opp} – час, необхідний для обміну одним машинним словом між двома процесами, t_{opg} – час обміну між CPU і GPU, t_{cpp} – час, який потрібен для встановлення зв'язку між двома процесами, t_{cpp} – час, який потрібен для встановлення зв'язку між CPU і GPU, M_i, Q_i – кількість відповідних обмінів та синхронізацій.

Обчислення прискорення алгоритму розглянемо у випадку, коли діагональні блоки крім останнього зберігаються в стрічковому форматі. (Вважається, що кількість наддіагоналей k у всіх діагональних блоках крім останнього однакова.)

Слід зазначити, що складність гібридного алгоритму факторизації одного діагонального блоку з [5] визначається в основному графічною складовою обробки матриці на GPU.

Тоді головні члени для визначення кількості арифметичних операцій обчислюються наступним чином: кількість операцій для факторизації діагонального блоку – $1/2qk^2$; розв'язання трикутної системи – $2qsk$; знаходження добутку – $2q^2s$; факторизація останнього діагонального блоку реалізується за $\frac{1}{3}s^3$ арифметичних операцій, де s-порядок останнього діагонального блоку, q-порядок всіх діагональних блоків крім останнього.

Тоді

$$T_1 = \left(\left(p-1\right)\alpha + \beta\right)t_g,$$

де $\alpha = \left(\frac{1}{2}qk^2 + 2qsk + 2q^2 s\right)$, $\beta = \frac{1}{3}s^3$.

Тоді

$$T_p = \left(\alpha + \beta\right)t_g + \left\lceil \frac{s^2\left(p-1\right)}{2} \right\rceil t_{opp} + s^2 p t_{opg} + \left\lceil \frac{\left(p-1\right)}{2} \right\rceil t_{cpp} + p t_{cgg},$$

Оскільки, практично s набагато менше q, приходимо до

$$S_p \approx \frac{\left(p-1\right)}{1 + \left\lceil \frac{s^2\left(p-1\right)}{2} \right\rceil t_{opp} + s^2 p t_{opg} + \left\lceil \frac{\left(p-1\right)}{2} \right\rceil t_{cpp} + p t_{cgg}},$$

$$E_p = \frac{S_p}{p}.$$

Література

1. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 334 с.
2. А. Н. Химич, А. В. Попов, В. В. Полянко: Алгоритмы параллельных вычислений для задач линейной алгебры с матрицами нерегулярной структуры // Кибернетика и систем. Аналіз. – 2011. – 47, № 6. – С. 159-174.
3. Уилкинсон Дж. Х., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с.
4. Хіміч О. М., Сидорук В. А. Гібридний алгоритм LL^T – факторизації розрідженої матриці. – Режим доступу: http://hpc-ua.org/hpc-ua-14/files/proceedings/10.pdf
5. Хіміч О. М., Баранов А. Ю. Гібридний алгоритм розв’язування лінійних систем зі стрічковими матрицями прямими методами // Комп’ютерна математика. – 2013. – № 2. – С. 80-88.