Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.85

ОДНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Т. М. Барболіна, *к. ф.-м. н., доцент*
Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка
tn_b@rambler.ru

Нехай є деяка система обслуговування, яка містить m пристроїв. Кожний із пристроїв у будь-який момент часу може здійснювати обслуговування одного із p замовлень, причому тривалість виконання замовлень не залежить від обслуговуючого пристрою. Вважатимемо, що тривалість обслуговування задається центрованим інтервалом, нечітким числом з дискретним носієм скінченної потужності або дискретною випадковою величиною, що має скінченну множину можливих значень. Необхідно до початку обслуговування визначити для кожного замовлення відповідний пристрій і момент початку його виконання за таких умов:

- відсутність затримки обслуговування: у момент часу, визначений як початок обслуговування i-го замовлення, виконання на цьому пристрої попередніх замовлень повинно завершитися;
- час обслуговування системою всіх замовлень повинен бути мінімально можливим.

Якщо при заданні часу виконання замовлень відсутня невизначеність, то, як відомо [1], розглянута задача може бути сформульована як задача упакування прямокутників у напівнескінченну смугу у такій постановці. Нехай маємо напівнескінченну смугу, розділену на смужки однакової ширини H. Задано також t прямокутників ширини H з довжинами $a_1,...,a_t$. Задача полягає у розташуванні прямокутників без накладань у смузі таким чином, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімально можливою (під довжиною зайнятої частини смуги розуміють максимальну з довжин зайнятих частин окремих смужок).

Якщо у визначенні тривалості обслуговування має місце вказана вище невизначеність, то доцільно розглядати прямокутники, довжина яких є центрованим інтервалом, нечітким числом з дискретним носієм скінченної потужності або скінченнозначною дискретною випадковою величиною. Такі параметри прямокутників з невизначеністю (інтервальною, нечіткою, стохастичною) позначатимемо літерами напівжирного накреслення і називатимемо ІНСН-параметрами.

Слід зазначити, що наявність невизначеності у задачі упакування прямокутників вимагає формалізації розташування прямокутників у смузі. Одним із можливих підходів до вирішення даної проблеми може бути використання введеного порядку на множині відповідних величин [2]–[4]. Проте таке розуміння взаємного розташування прямокутників не дає можливості гарантувати відсутність затримок обслуговування при всіх можливих значеннях ІНСН-параметрів. У даній роботі розглядається підхід, який вільний від зазначених недоліків і ідейно близький до жорстких постановок задач стохастичної оптимізації.

Для зручності викладу говоритимемо також про можливі значення ІНСН-параметрів, під якими розумітимемо:

- для центрованих інтервалів – множину точок відповідного інтервалу, у тому числі кінці інтервалу;
- для нечітких чисел – елементи носія нечіткого числа;
- для дискретних випадкових величин – відповідно до загальноприйнятого розуміння – множину тих значень, для яких відповідно ймовірність додатна.

Можливі значення ІНСН-параметрів позначатимемо літерами звичайного накреслення. Також для ІНСН-параметра $\mathbf{r}$ через $r^{\min}$ позначатимемо найменше, а через $r^{\max}$ найбільше можливе значення. Прямокутником Π, у якого принаймні один із розмірів заданий ІНСН-параметром, назвемо множину реалізацій прямокутників, розміри яких набувають одне з можливих значень відповідних ІНСН-параметрів.

Нехай на площині задана декартова система координат xOy.

Розглядатимемо розташування прямокутників з Π, сторони яких паралельні осям координат. Тоді розташування прямокутника відносно системи координат може бути визначене такими ІНСН-параметрами:

$(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$ – відповідно абсциса й ордината лівого нижнього кута при кожній реалізації прямокутника з Π в системі координат xOy;

$\mathbf{h}$ – ширина (висота) прямокутника;

$\mathbf{d}$ – довжина прямокутника.

Прямокутник з такими ІНСН-параметрами позначатимемо $\Pi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, \mathbf{h}, \mathbf{d})$. Також через $\tau(\eta, \theta)$ позначатимемо відрізок з координатами кінців η і θ (ІНСН-параметрами або дійсними числами). Надалі вважаємо, що виконуються нерівності $\eta \le \theta$ (якщо $\eta, \theta \in R^1$), $\eta^{\min} \le \theta^{\min}$ (для ІНСН-параметрів), а також $\eta^{\max} \le \theta^{\min}$. Назвемо проекціями прямокутника $\Pi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, \mathbf{h}, \mathbf{d})$ на осі координат: $\Pi_x(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, \mathbf{h}, \mathbf{d}) = \tau(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} + \mathbf{d})$ (проекція на вісь Ox), $\Pi_y(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, \mathbf{h}, \mathbf{d}) = \tau(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{h})$ (проекція на Oy).

Формалізація взаємного розташування прямокутників може бути здійснена на основі встановлення взаємного розташування їх проекцій на осі координат. Наведемо необхідні означення щодо взаємного розташування відрізків.

Означення 1. Відрізок $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ називатимемо *безумовно належним* відрізку $\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, якщо при будь-яких можливих значеннях p, q, r, s ІНСН-параметрів $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ всі точки відрізка $\tau(r, s)$ належать відрізку $\tau(p, q)$.

Означення 2. Відрізок $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ називатимемо *можливо належним* відрізку $\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, якщо за відсутності безумовної належності існують такі можливі значення p, q, r, s ІНСН-параметрів $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$, при яких усі точки відрізка $\tau(r, s)$ належать відрізку $\tau(p, q)$.

Означення 3. Відрізки $\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ і $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ називатимемо такими, що *безумовно не перетинаються*, якщо при будь-яких можливих значеннях p, q, r, s ІНСН-параметрів $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ відрізки

$\tau(p,q)$ і $\tau(r,s)$ не мають спільних точок.

Означення 4. Відрізки $\tau(\mathbf{p,q})$ і $\tau(\mathbf{r,s})$ називатимемо такими, що можливо не перетинаються, якщо виконуються такі умови:

а) існують можливі значення p,q,r,s ІНСН-параметрів $\mathbf{p,q,r,s}$, при яких відрізки $\tau(p,q)$ і $\tau(r,s)$ мають більше однієї спільної точки.;

б) існує таке можливе значення $\overline{r}$ ІНСН-параметра $\mathbf{r}$, що при бідь-яких можливих значеннях ІНСН-параметрів $\mathbf{p,q,s}$ відрізки $\tau(p,q)$ і $\tau(\overline{r},s)$ не мають спільних точок.

Означення 5. Відрізки $\tau(\mathbf{p,q})$ і $\tau(\mathbf{r,s})$ називатимемо такими, що *зовнішньо дотикаються*, якщо існує єдина пара можливих значень q,r ІНСН-параметрів $\mathbf{q,r}$, при якихї незалежно від можливих значень p,s ІНСН-параметрів $\mathbf{p,s}$ відрізки $\tau(p,q)$ і $\tau(r,s)$ мають одну спільну точку, а при всіх інших можливих значеннях ІНСН-параметрів відрізки не мають спільних точок.

Означення 6. Відрізки $\tau(\mathbf{p,q})$ і $\tau(\mathbf{r,s})$ називатимемо такими, що *внутрішньо дотикаються*, якщо для будь-яких можливих значень p,q,r,s ІНСН-параметрів $\mathbf{p,q,r,s}$ відрізки $\tau(r,s)$ і $\tau(p,q)$ мають відмінні (неспільні) точки і при цьому існує єдина пара можливих значень $\overline{q},\overline{r}$ ІНСН-параметрів $\mathbf{q,r}$ така, що незалежно від можливих значень p,s ІНСН-параметрів $\mathbf{p,s}$ відрізки $\tau(p,\overline{q})$ і $\tau(\overline{r},s)$ мають одну спільну точку, а при всіх інших можливих значеннях ІНСН-параметрів відрізки мають більше однієї спільної точки.

Означення 7. Відрізки $\tau(\mathbf{p,q})$ і $\tau(\mathbf{r,s})$ називатимемо такими, що *безумовно перетинаються*, якщо $\tau(\mathbf{r,s})$ не є безумовно або можливо належним $\tau(\mathbf{p,q})$ і при будь яких можливих значеннях p,q,r,s ІНСН-параметрів $\mathbf{p,q,r,s}$ відрізки $\tau(p,q)$ і $\tau(r,s)$ мають більше однієї спільної точки.

Означення 8. Відрізки $\tau(\mathbf{p,q})$ і $\tau(\mathbf{r,s})$ називатимемо такими, що *можливо перетинаються*, якщо виконуються такі умови:

а) відрізок $\tau(\mathbf{r,s})$ не є можливо належним відрізку $\tau(\mathbf{p,q})$;

б) існують можливі значення p,q,r,s ІНСН-параметрів

$\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s}$, при яких відрізки $\tau(p,q)$ і $\tau(r,s)$ не мають спільних точок;

в) існує таке можливе значення $\overline{q}$ ІНСН-параметра $\mathbf{q}$, що при будь-яких можливих значеннях ІНСН-параметрів $\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{s}$ відрізки $\tau(p,\overline{q})$ і $\tau(r,s)$ мають принаймні одну спільну точку.

Твердження 1. Для будь-яких двох відрізків $\tau(\mathbf{p},\mathbf{q})$ і $\tau(\mathbf{r},\mathbf{s})$, для яких виконуються умови $p^{\max} \le q^{\min}$ і $p^{\min} \le r^{\min}$, має місце одне із співвідношень, введених в означеннях 1-8.

Способи взаємного розташування прямокутників, що встановлюються на основі взаємного розташування їх проекцій, наведено в табл. 1, де використано такі позначення:

Б – безумовно,
М – можливо,
Н – належить
П – перетинаються,
НП – не перетинаються,
З – зовнішньо,
В – внутрішньо,
Д – дотикаються,
Р – розміщується.

Таблиця 1

Π_x / Π_y	**БН**	**МН**	**БНП**	**МНП**	**БП**	**МП**	**ЗД**	**ВД**
БН	БР	МР	БНП	МНП	БП	МП	БЗД	БВД
МН	МР	МР	БНП	МНП	БП	МП	МЗД	МВД
БНП	БНП	БНП	БНП	БНП	БНП	БНП	БНП	БНП
МНП	МНП	МНП	БНП	МНП	МНП	МНП	МНП	МНП
БП	БП	БП	БНП	МНП	БП	ВП	БЗД	БВД
МП	МП	МП	БНП	МНП	МП	МП	МЗД	МВД
ЗД	БЗД	МЗД	БНП	МНП	БЗД	МЗД	ЗД	ЗВД
ВД	БВД	МВД	БНП	МНП	БВД	МВД	ЗВД	ВД

Зокрема, прямокутник $\Pi\ \boldsymbol{\xi},\mathbf{v},\mathbf{h},\mathbf{d}$ називатимемо таким, що безумовно розміщується у прямокутнику $\Pi\ \boldsymbol{\xi}',\mathbf{v}',\mathbf{h}',\mathbf{d}'$, якщо відрізки $\Pi_x\ \boldsymbol{\xi},\mathbf{v},\mathbf{h},\mathbf{d}$ і $\Pi_y\ \boldsymbol{\xi},\mathbf{v},\mathbf{h},\mathbf{d}$ як безумовно належними відрізкам $\Pi_x\ \boldsymbol{\xi}',\mathbf{v}',\mathbf{h}',\mathbf{d}'$ і $\Pi_y\ \boldsymbol{\xi}',\mathbf{v}',\mathbf{h}',\mathbf{d}'$ відповідно. Аналогічно формулюються означення інших способів взаємного розташування прямокутників: можлива належність, безумовний і можливий неперетини, безумовний і можливий перетини, безумовний зовнішній (внутрішній) дотик, можливий зовнішній (внутрішній) дотик, зовнішній (внутрішній) дотик, зовнішньо-внутрішній дотик.

Використовуючи введені поняття, побудуємо математичну модель сформульованої вище задачі розподілу завдань. Відсутність затримок обслуговування означає, що при будь-яких реалізаціях довжин прямокутників не можуть виникати накладання, тобто прямокутники або безумовно не перетинаються, або зовнішньо дотикаються. Очевидно, що в оптимальному розв'язку прямокутники у смужках повинні розташовуватися таким чином, щоб кожний наступний зовнішньо дотикався попереднього.

Позначимо $\Pi\ \boldsymbol{\xi}_{ij},\mathbf{v}_{ij},\mathbf{h}_{ij},\mathbf{x}_{ij}$ – прямокутник, що стоїть в i-й ($i=\overline{1,m}$) смужці на j-му ($j=\overline{1,n}$) від початку смужки місці (лівий нижній кінець смуги розташований в початку системи координат, причому вісь Ox спрямована вздовж нескінченної сторони смуги). Тоді $\mathbf{h}_{ij}=H$, $\mathbf{v}_{ij}=(i-1)H$, $\xi_{ij}\in R^1$ $\forall i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$. Можна показати, що необхідною і достатньою умовою зовнішнього дотику сусідніх прямокутників є виконання рівності $\xi_{ij}+x_{ij}\ {}^{\max}=\xi^{\min}_{i,j+1}$. А тоді також $\xi_{i,j+1}=\xi_{ij}+x_{ij}^{\ \max}$ і довжина зайнятої частини i-ї смужки дорівнює $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\max}$, а довжина зайнятої частини смуги в цілому — $\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\max}$. Для формалізації обмежень на можливі довжини прямокутників уведемо в розгляд мультимножину

$G = \left\{ \underbrace{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_0}_{mn-t}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \right\}$, де $\mathbf{a}_0 = 0$. Тоді кожному розташуванню прямокутників у смузі взаємно однозначно відповідає вектор $x = \ \mathbf{x}_{11}, \ldots, \mathbf{x}_{1n}, \mathbf{x}_{21}, \ldots, \mathbf{x}_{m1}, \ldots, \mathbf{x}_{mn} \ \in E_k \ G$ ($k = mn$), причому додавання прямокутників нульової довжини не змінює довжини зайнятої частини смуги. Таким чином, математична модель сформульованої задачі має вигляд

$$F \ \ x^* \ = \min_{x \in E_k \ G} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\max}; \ x^* = \arg \min_{x \in E_k \ G} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\max}$$

Отже, в роботі формалізовано взаємне розміщення прямокутників з ІНСН-параметрами. Введенні поняття використано для побудови математичної моделі упаковки прямокутників за умови, що накладання прямокутників не може місця при жодних реалізаціях стохастичних параметрів.

Література

1. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
2. Сергиенко И. В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №5. – С. 38-50.
3. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352.
4. Ємець О. О. Формалізація взаємного розташування прямокутників з випадковими параметрами / О. О. Ємець, Т. М. Барболіна // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2014): abstracts of XXIV International Conference, September 1-5, 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic. – К.: ТВіМС, 2014. – С. 124-125.