Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.85

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ БЕЗУМОВНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ІМОВІРНІСНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

Т. М. Барболіна, *к.ф.-м.н., доцент*
Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г.Короленка
tn_b@rambler.ru
Ємець О.О., *д.ф.-м.н., професор*
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
yemetsli@ukr.net

У доповіді розглядається задача

$$C\left(X^*\right)=\min_{X\in E_\eta^k(\Gamma)}\sum_{j=1}^{k}c_jX_j\ ,\ X^*=\arg\min_{X\in E_\eta^k(\Gamma)}\sum_{j=1}^{k}c_jX_j\ , \qquad (1)$$

де $C\left(X\right)=\sum_{j=1}^{k}c_jX_j$, где $c_j\in R^1$, $c_j>0$, $E_\eta^k\left(\Gamma\right)$ — загальна множина розміщень з елементів мультимножини $\Gamma=\left\{G_1,...,G_\eta\right\}$, які є дискретними випадковими величинами, що мають скінченну кількість можливих значень та невід’ємне математичне сподівання. Мінімум розуміємо як дискретну випадкову величину, першу в скінченному переліку дискретних випадкових величин, упорядкованих згідно з введеним нижче лінійним порядком.

Нехай $M\left(A\right)$ позначає математичне сподівання, а $D\left(A\right)$ — дисперсію дискретної випадкової величини A, $H\left(A\right)=\left(M\left(A\right);-D\left(A\right)\right)$. Для будь-яких $u,u'\in R^m$ записуватимемо $u<_l u'$, якщо перша ненульова компонента різниці $u-u'$ від’ємна. Якщо $u<_l u'$ або $u=u'$, то записуватимемо $u\leq_l u'$

Означення. Дискретні випадкові величини A,B називатимемо упорядкованими у неспадному порядку ($A\preceq B$), якщо виконується одна з таких умов:

а) $A = B$;

б) $H(A) <_l H(B)$;

в) $H(A) = H(B)$ і знайдеться таке t, що $a^i = b^i$, $P(A = a^i) = P(B = b^i)$ для всіх $1 \le i < t$, і при цьому або $a^t < b^t$, або $a^t = b^t$ і $P(A = a^i) > P(B = b^i)$.

Вважатимемо, що коефіцієнти цільової функції $C(X)$ упорядковані за незростанням, причому мультимножина $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$ має основу $(\overline{c}_1, ..., \overline{c}_s)$ і первинну специфікацію $(\overline{q}_1, ..., \overline{q}_s)$. Позначимо $q_1 = 1$, $q_{i+1} = q_i + \overline{q}_i = 1 + \sum_{j=1}^{i} q_j$ для $i \in J_s$; тоді виконуються співвідношення

$$c_{q_1} = ... = c_{q_2 - 1} > c_{q_2} = ... = c_{q_3 - 1} > ... > c_{q_s} = ... = c_k > 0. \qquad (2)$$

Разом із задачею (1) розглянемо детерміновану задачу

$$L(x^*) = \operatorname*{extr}_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \; x^* = \arg\operatorname*{extr}_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \qquad (3)$$

де $x = (x_1, ..., x_k) \in R^k$, $c_j \in R^1$, $c_j > 0$ $\forall j \in J_k$, елементи мультимножини $G = \{g_1, ..., g_\eta\}$ задовольняють умову

$$0 \le g_1 \le ... \le g_\eta. \qquad (4)$$

Відома [1] достатня умова розв'язку задачі (3). Використовуючи критерій суміжності вершин загального многогранника розміщень, можна показати справедливість такої теореми.

Теорема 1. Точка x^* дає розв'язок задачі (3), у якій для коефіцієнтів цільової функції та елементів мультимножини виконуються нерівності (2) і (4) відповідно, тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє умови

$$\left(x^*_{q_w}, ..., x^*_{q_{w+1}-1}\right) \in E_{m_w}\left(G^w\right) \; \forall w \in J_s,$$

де $m_w = \left| G^w \right|$, $G^w = \left\{ g_{q_w}, ..., g_{q_{w+1}-1} \right\}$ для задач мінімізації и $G^w = \left\{ g_{\eta - q_{w+1}}, ..., g_{\eta - q_w + 1} \right\}$ для задач максимізації.

Розглянемо тепер властивості розв'язку задачі (1).

Теорема 2. Якщо виконуються умови (2) і

$$H(G_1) \leq_l ... \leq_l H(G_\eta), \tag{5}$$

то для однієї з мінімалей X^* у задачі (1) виконуються співвідношення

$$H(X_j^*) = H(G_j) \quad \forall j \in J_k . \tag{6}$$

Доведення проводиться за такою схемою. Нехай C^* — мінімум в задачі (1), $\Gamma^M = \left\{ M(G_1), ..., M(G_\eta) \right\}$. Для точки $X \in E_\eta^k(\Gamma)$ позначимо $\mu(X) = (M(X_1), ..., M(X_k))$. Тоді розв'язок задачі мінімізації лінійної цільової функції $L(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$ на множині $E_\eta^k(\Gamma^M)$ дає точка $\mu(X^*)$, де X^* задовольняє (6). Оскільки $L(\mu(X)) = M(C(X))$, то $M(C(X^*)) \leq M(C(X))$ для будь-якої точки $X \in E_\eta^k(\Gamma)$. З іншого боку $M(C^*) \leq M(C(X^*))$. Отже, $M(C^*) = M(C(X^*))$. Ґрунтуючись на теоремі 1, можна також показати, що існує така точка X', що $C(X') = C^*$ і при цьому

$$M(X_j') = M(G_j) \ \forall j \in J_k ; \tag{7}$$

На наступному етапі розіб'ємо мультимножину Γ на підмультимножини Γ_i так, щоб усі випадкові величини, належні Γ_i, мали однакове математичне сподівання. Тоді $\left(X'_{\eta_i}, ..., X'_{\eta_i + k_i - 1} \right) \in E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i)$, де $n_i = \left| \Gamma_i \right|$, $k_i = \min\left\{ n_i, k - \sum_{j=1}^{i-1} n_j \right\}$.

Максималлю функції $\tilde{L}_i(x)=\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i+k_i-1} c_j^2 x_j$ на множині k_i-розміщень з мультимножини $\Gamma_i^D=\left\{D\left(G_{\eta_i}\right),...,D\left(G_{\eta_i+n_i-1}\right)\right\}$ є точка $\delta_i(X)=\left(D\left(X_{\eta_i}^*\right),...,D\left(X_{\eta_i+k_i-1}^*\right)\right)$. Тоді також $\sum_{j=1}^{k} c_j^2 D\left(X_j^*\right)\geq\sum_{j=1}^{k} c_j^2 D\left(X_j'\right)$, тобто $D\left(C\left(X^*\right)\right)\geq D\left(C\left(X'\right)\right)$. Але оскільки з $M\left(C\left(X'\right)\right)=M\left(C\left(X^*\right)\right)$ і $C\left(X'\right)=C^*\preceq C\left(X^*\right)$ випливає $D\left(C\left(X'\right)\right)\geq D\left(C\left(X^*\right)\right)$, то $D\left(C\left(X'\right)\right)=D\left(C\left(X^*\right)\right)$. Далі аналогічно, як це робиться для математичного сподівання, доводиться, що знайдеться точка X'', яка задовольняє (7), така що $C\left(X''\right)=C^*$ і $D\left(X_j''\right)=D\left(X_j^*\right)$ $\forall j\in J_k$. Таким чином, мініталь X'' в задачі (1) задовольняє умови $H\left(X_j''\right)=H\left(X_j^*\right)=H\left(G_j\right)$ $\forall j\in J_k$.

Слід зазначити, що, з одного боку, задача (1) може мати мінімалі, які не задовольняють умову (6), а з іншого, не всі точки, що задовольняють (6), є мінімалями. Для пошуку розв'язку задачі (1) пропонується розбити мультимножину Γ на підмультимножини з рівними значеннями характеристичних векторів елементів. Тоді мінімаль вихідної задачі формується із мінімалей в задачах вигляду (1) на кожній із таких підмультимножин.

У доповіді досліджуються властивості розв'язку лінійної безумовної задачі стохастичної оптимізації на розміщеннях.

Література

1.Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.