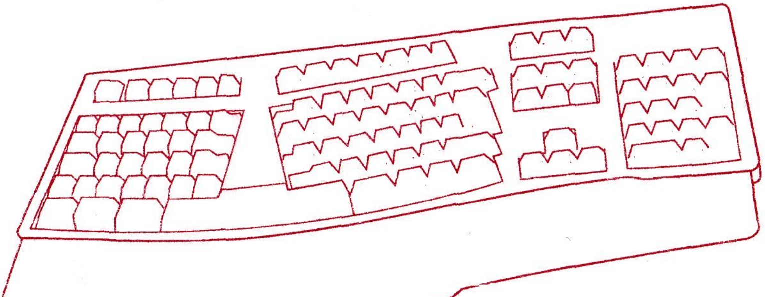
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2013)

Матеріали
IV Всеукраїнської
науково-практичної конференції

(м. Полтава, 21—23 березня 2013 року)



ПОЛТАВА
ПУЕТ
2013

Національна академія наук України
Центральна спілка споживчих товариств України
Українська Федерація Інформатики

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2013)

Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 21–23 березня 2013 року)

За редакцією професора Ємця О. О.

Полтава
ПУЕТ
2013

УДК 004+519.7
ББК 32.973я431
І-74

І-74 Інформатика та системні науки (ІСН-2013) : матеріали IV Всеукр. наук.-практ. конф., (м. Полтава, 21–23 берез. 2013 р.) / за ред. Ємця О. О. – Полтава : ПУЕТ, 2013. – 323 с.

ISBN 978-966-184-211-2

Збірник тез конференції містить сучасну проблематику в таких галузях інформатики та системних наук, як теоретичні основи інформатики і кібернетики, математичне моделювання і обчислювальні методи, математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем, системний аналіз і теорія оптимальних рішень. Представлено доповіді, що відображають проблеми сучасної підготовки фахівців з інформатики, прикладної математики, системного аналізу та комп’ютерних інформаційних технологій.

Збірка розрахована на фахівців з кібернетики, інформатики, системних наук.

УДК 004+519.7
ББК 32.973я431

Матеріали друкуються в авторській редакції мовами оригіналів.
За виклад, зміст і достовірність матеріалів відповідають автори.

ISBN 978-966-184-211-2

6. Сергеева Л. Н. Нелинейная економика: модели и методы / Л. Н. Сергеева. – Запорожье : «Полиграф», 2003. – 218 с.
7. Ємець О. О. Ізоморфізм Бовмана між графами і переставленнями та його використання для побудови предфрактальних переставних конфігурацій / О. О. Ємець, О. В Тур // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ-2011): Матеріали Всеукраїнського наукового семінару 26–27 серпня 2011 р. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 54–57. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/1023.
8. Ємець О. О. Деякі предфрактальні переставні комбінаторні конфігурації / О. О. Ємець, О. В. Тур // Інформатики та системні науки (ІСН-2012): матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 1–3 березня 2012 р.). – Полтава: ПУЕТ, 2012. – С. 98–104. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/1036.
9. Ємець О. О. Деякі предфрактальні переставні комбінаторні конфігурації для переставлень з повтореннями / О. О. Ємець, О. В. Ольховська // 13 Міжвузівський науково-практичний семінар «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 13–14.04.2012. – Кіровоград, 2012. – С. 55–58. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/1202.

УДК 519.85

ПРО КІЛЬКІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАГАЛЬНИХ МНОЖИНАХ РОЗМІЩЕНЬ ТА ПОЛІРОЗМІЩЕНЬ

О. О. Ємець, *д.ф.-м.н., професор;* ***Т. В. Чілікіна,*** *доцент*
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
tv.0502@mail.ru

Не зважаючи на поширеність використання таких комбінаторних множин, як загальна множина розміщень, загальна множина полірозміщень, полікомбінаторні множини [1–14], авторам не відомі публікації, де б були пораховані кількості елементів в цих множинах.

Нехай маємо мультимножину $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ з основою $S(G)=(e_1,e_2,..,e_v)$ та первинною специфікацією

$[G]=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_v)$. Мультимножину запишемо ще так: $G=\left\{e_1^{\eta_1},e_2^{\eta_2},...,e_v^{\eta_v}\right\}$.

Розглянемо загальну множину k-розміщень $E_{\eta v}^k(G)$.

У випадку $\eta=v$, тобто, коли $\eta_i=1\ \forall i=1,2,...,v$, а G – множина, з $E_{\eta v}^k(G)$ маємо $E_{\eta\eta}^k(G)=E_\eta^k(G)$ – множину k-розміщень без повторень. Добре відомо, що кількість елементів в ній підраховується так:

$$\left|E_\eta^k(G)\right|=\frac{\eta!}{(\eta-k)!}, \tag{1}$$

тут $|M|$ – позначає кількість елементів в скінченній множині M.

У випадку $\eta_i=k\ \forall i=1,2,...,v$, тобто $\eta=kv$, маємо $E_{\eta v}^k(G)=\overline{E}_\eta^k(G)$ – множину k-розміщень з повтореннями. Як добре відомо,

$$\left|\overline{E}_\eta^k(G)\right|=v^k. \tag{2}$$

У загальному ж випадку, коли $1\le\eta_i\le k$ формула для $\left|E_{\eta v}^k(G)\right|$ не відома.

Як один зі способів підрахунку їх числа можна розглядати побудову дерева, листи якого відповідають k-розміщенням.

Пояснимо цей спосіб на прикладі.

Приклад 1. Нехай $G=\left\{a^1,b^2,c^3\right\}$. Побудуємо дерево, що має листям всі елементи $E_{6,3}^3(G)$.

Зауважимо, що при $S(G)=(a,b,c)$ маємо $[G]=(1,2,3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$.

Вершини i-го рівня дерева відповідають i-розміщенню з елементів G $(1\le i\le k)$. Корінь – вершина 0-го рівня. Вершині відповідає вектор (V_1,V_2,V_3) кількостей використаних елементів: a,b,c в i-розміщенні, якому відповідає вершина. Зауважимо, що у всіх векторів (V_1,V_2,V_3): $V_1 \le 1 = \eta_1$, $V_2 \le 2 = \eta_2, V_3 \le 3 = \eta_3$ ребрам відповідають символи з основи $S(G)$, якщо їх використана кількість не перевищує наявність в мультимножині $V_j \le \eta_j, j = 1,2,3$ (в кожному векторі (V_1,V_2,V_3) $\sum_{j=1}^{3} V_i = i$ на i-му рівня дерева).

Щоб отримати i-розміщення, що відповідає вершині треба виписати всі i символів , що стоять на ребрах по гілці від кореня до вибраної вершини i-го рівня.

Таким чином 3-й рівень дерева дає вершини-листочки, які відповідають 3-розміщенням. Випишемо їх, перебираючи вершини: $(a,b,b),(a,b,c),(a,c,b),(a,c,c),(b,a,b),(b,a,c),(b,b,a)$, $(b,c,b),(b,c,c),(c,a,b),(b,c,a),(b,b,c),(c,a,c),(c,b,a),(c,b,b)$, $(c,b,c),(c,c,a),(c,c,b),(c,c,c)$. Таким чином, маємо 19 елементів в $E^3_{6,3}(G)$.

Можна спробувати застосувати апарат твірних функцій (генератрис). Але в [15, с. 44]. зазначено, що це рівносильно побудові некомутативної алгебри твірних функцій, що в кінцевому підсумку не дає переваг в порівнянні з безпосереднім перерахунком k-розміщень.

Розглянутий підхід до побудови дерева, листи якого відповідають k-розміщенням, узагальнюються в такому твердженні.

Теорема 1. Кількість елементів загальної множини k-розміщень $E^k_{\eta,k}(G)$ з елементів мультимножини $G = \{g_1,...,g_\eta\}$ з основою $S(G) = (e_1,e_2,..,e_v)$ та первинною специфікацією $[G] = (\eta_1,\eta_2,...,\eta_v)$ обчислюється за формулою:

$$\left|E^k_{\eta v}(G)\right| = \sum_{\substack{V_1+V_2+...V_v=k \\ 0\le V_i \le \eta_i}} \frac{k!}{V_1!V_2!...V_v!}, \qquad (3)$$

де підсумовування ведеться за всіма цілими невід'ємними розв'язками $(V_1,...,V_\nu)$ рівняння $V_1+V_2+..+V_\nu=k$ за умови, що $0\le V_i\le\eta_i \quad \forall i=1,2,...,\nu$.

Доведення. Позначимо k_i кількість елементів $l_i\in S(G)$, що вибрано в k-розміщення. Зрозуміло, що $0\le V_i\le\eta_i$, оскільки в G елементів l_i є в кількості η_i штук. Розміщення має k елементів, отже має виконуватися умова $V_1+V_2+..+V_\nu=k$. Кожна k-вибірка $R=\{e_1^{V_1},..,e_\nu^{V_1}\}$, де $V_1+...+V_\nu=k,\ V_i\in\eta_i$ утворює стільки k-розміщень, скільки перестановок (а це перестановки з повтореннями) з неї можна утворити. Як відомо (див., наприклад, [12]) кількість перестановок з k елементів мультимножини R дорівнює:

$$\left|E_{kt}(R)\right|=\frac{k!}{V_1!V_2!...V_\nu!}, \tag{4}$$

де 0!=1, t – кількість різних неперервних елементів в R, $\nu-t$ – кількість нулів серед чисел $k_1,k_2,...,k_\nu$. Щоб підрахувати всі k – розміщення в $E_{\eta\nu}^k(G)$ треба перебрати всі можливі невід'ємні цілі розв'язки рівняння $V_1+V_2+..+V_\nu=k$ за умови $0\le V_i\le\eta_i$ та знайти суму отриманих за (4) кількостей для одержаної при цьому мультимножини R. Це і буде кількість k-розміщень, що визначається за формулою (3). Теорема доведена.

Наслідок з теореми 1. З формули (3) за умов $\eta=\nu,\ \eta_i=1\ \forall i=1,2,...,\nu$, тобто коли $E_{\eta\eta}^k(G)=E_\eta^k(G)$, одержуємо формулу (1).

Доведення. За умов, коли всі елементи в G різні $(\eta_i=1\ \forall i)$ рівняння $V_1+V_2+..+V_\nu=k$ має розв'язок, в якому k одиниць та $\nu-k=\eta-k$ нулів. Таких розв'язків, очевидно, C_η^k, при кожному з яких з (4) маємо $\frac{k!}{V_1!V_2!...V_\nu!}=k!$, бо $\forall i\quad V_i!=1$ (це або 1! або 0!) . Отже підставляючи все в (3), маємо:

$$\left|E_{\eta}^{k}(G)\right| = C_{\eta}^{k} \cdot k! = \frac{\eta!}{(\eta-k)! \cdot k!} k! = \frac{\eta!}{(\eta-k)!},$$

що і треба було довести.

Наслідок 2 з теореми 1. З формули (3) за умов $\eta_i = k \ \forall i = 1,2,...,v$, тобто, коли $E_{\eta v}^{k}(G) = \overline{E}_{\eta}^{k}(G)$, $\eta = v \cdot k$ одержуємо формулу (2).

Доведення. Скористаємося переставленням *k*-розміщень як листків дерева. З побудови дерева (*k* рівнів, на яких вершини галузяться на v вершин) маємо листків на *k*-му рівні v^k.

З іншого боку, як і при доведенні теореми 1, ці листки можна порахувати як

$$\sum_{\substack{V_1+V_2+...V_v=k \\ 0 \le V_i \le k}} \frac{k!}{V_1! V_2! ... V_v!}.$$

Отже маємо справедливість формули:

$$\sum_{\substack{V_1+V_2+...V_v=k \\ 0 \le V_i \le k}} \frac{k!}{V_1! V_2! ... V_v!} = v^k, \tag{5}$$

де підсумовування ведеться за всіма цілими невід'ємними розв'язками рівняння $V_1 + V_2 + .. + V_v = k$, де $0 \le V_i \le k$, тобто коли $\eta_i = k \ \forall i = 1,2,...,v$, що теж саме: $E_{\eta v}^{k}(G) = \overline{E}_{\eta}^{k}(G)$, маємо справедливість формули (5). Що і треба було довести.

Маючи справедливість теореми 1, можна підрахувати кількість елементів в загальній множині полірозміщень [1–4].

Твердження 2. Загальна множина полірозміщень $E_{\eta v}^{ks}(G)$ є декартовим добутком загальних множин розміщень $E_{\eta_i v_i}^{k_i}\left(G^{N_i}\right)$, тобто

$$E_{\eta n}^{ks}(G) = \prod_{i=1}^{s} E_{\eta_i v_i}^{k_i}\left(G^{N_i}\right), \tag{6}$$

де $G^{N_i} \subset G,\ G^{N_i} = \left\{ g_{j_1},...,g_{j_{n_i}} \mid j_1,...,j_{n_i} \in N^i \right\}$, де ν_i – кількість різних елементів в мультимножині G^{N_i}.

Доведення. При утворенні $E_{\eta\nu}^{ks}(G)$ мультимножина G розбивається на доданки $G^{N_1},...,G^{N_s}$ ($G^{N_1}+...+G^{N_s}=G$) згідно розбиттю множини J_η на підмножини $N_1,...,N_s$ ($N_1 \cup ... \cup N_s = N,\ N_i \cap N_j = \varnothing,\ N_i \neq \varnothing\ \forall i,j \in J_s$). Далі з G^{N_i} формується k-вибірка, де $k \le |N_i| = n$, яка стає частиною з номером i вектора $g \in E_{\eta n}^{ks}$, яка операцією конкатенацією з'єднується з іншими такими вибірками для $\forall i \in J_s$ в порядку зростання i. Тобто g – це вектор з s векторів, кожен з яких є k_i-вибірка з G^{N_i}. Оскільки розглядаються всі можливі випадки, то утворюється декартовий добуток з $E_{n_i\nu_i}^{k_i}\left(G^{N_i}\right)$, де ν_i – кількість різних елементів в G^{N_i}. З іншого боку ми утворили згідно означення загальну множину полі розміщень. Це і доводить формулу (6).

Твердження 3. Множина H, що використовується в означенні загальної множини поліроміщень є декартовим добутком множин розміщень $E_{n_i}^{k_i}(N_i)$, тобто

$$H = \prod_{i=1}^{s} E_{n_i}^{k_i}(N_i), \tag{7}$$

де $N_i \subset J_\eta,\ N_1 \cup ... \cup N_s = J_\eta,\ N_i \cap N_j = \varnothing,\ N_i \neq \varnothing\ \forall i,j \in J_s$.

Доведення. При утворення $E_{\eta\nu}^{ks}(G)$ множина $J_\eta = \{1,2,...,\eta\}$ розбивається на непорожні підмножини $N_1,...,N_s$, причому $N_1 \cup ... \cup N_s = J_\eta$. Далі з N_i здійснюється виокремлення k_i-вибірки $\pi^i = \left(\pi_{i_1},...,\pi_{i_{k_i}}\right)$, де $k_i = const$ та $k_i \le n_i = |N_i|$. З таких k_i-вибірок π^i утворюється вектор $\pi = \left(\pi^1,...,\pi^i,...,\pi^s\right)$, який, очевидно, є елементом декартового добутку

$E_{n_1}^{k_1}(N_1) \times \ldots \times E_{n_i}^{k_i}(N_i)$. Множина H складається з усіх таких можливих векторів π, тобто

$$H = \prod_{i=1}^{s} E_{n_i}^{k_i}(N_i),$$

що і треба було довести.

Твердження 4. Кількість елементів в множині полірозміщень $E_{\eta v}^{ks}(G)$ обчислюється за формулою:

$$\left|E_{\eta v}^{ks}(G)\right| = \prod_{i=1}^{s} \sum_{\substack{V_1^i + \ldots + V_{\nu_i}^i = k_i \\ 0 \le V_j^i \le \eta_{\nu_i}^i}} \frac{k_i!}{V_1^i! V_2^i! \cdot \ldots \cdot V_{\nu_i}^i!}, \qquad (8)$$

де мультимножина G має доданки $G = G^{N_1} + \ldots + G^{N_i} + \ldots + G^{N_s}$, кожен з основою $S\left(G^{N_i}\right) = \left(e_1^i, \ldots, e_{\nu_i}^i\right)$ та первинною специфікацією $\left[G^{N_i}\right] = \left(\eta_1^i, \ldots, \eta_{\nu_i}^i\right)$ $\forall i \in J_s$.

Доведення. За теоремою 1:

$$\left|E_{n_i \nu_i}^{k_i}\left(G^{N_i}\right)\right| = \sum_{\substack{V_1^i + \ldots + V_{\nu_i}^i = k_i \\ 0 \le V_j^i \le \eta_{\nu_i}^i}} \frac{k_i!}{V_1^i! V_2^i! \cdot \ldots \cdot V_{\nu_i}^i!}, \qquad (9)$$

де підсумовування ведеться за всіма цілими розв'язками $V_1^i, \ldots, V_j^i, \ldots, V_{\nu_i}^i$ рівняння $V_1^i + \ldots + V_{\nu_i}^i = k_i$ за умови, що $0 \le V_j^i \le \eta_{\nu_i}^i \quad \forall j \in J_{\nu_i} \quad \forall i \in J_s$.

Користуючись комбінаторним правилом добутку (див., наприклад, [12]) маємо з (9) та (6) формулу (8), яку і треба було довести.

Твердження 5. Кількість елементів множини H обчислюється за формулою:

$$|H| = \prod_{i=1}^{s} \frac{n_i!}{(n_i - k_i)!}. \qquad (10)$$

Доведення. За формулою (1):

$$\left|E_{n_i}^{k_i}\left(N_i\right)\right| = \frac{n_i!}{\left(n_i - k_i\right)!}\,. \qquad (11)$$

З формул (11), (7) та правилом добутку маємо формулу (10), яку і треба було довести.

Висновки. В роботі одержана формула підрахунку кількості елементів в загальній множині розміщень. Показано, що, як часткові випадки, вона включає відомі формули підрахунку кількості розміщень без повторень та розміщень з повтореннями. Як напрям подальших досліджень варто було б розглянути оцінку кількості операцій по застосуванню цієї формули.

Література

1. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учеб. пособие. / О. А. Емец. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
3. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещения : монография / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наукова думка, 2008. – 159 с.
4. Стоян Ю. Г. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доповіді НАН України / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – 1999. – № 8. – С. 37–41.
5. Емец О. А. Моделирование некоторых инвестиционных задач с помощью евклидовой комбинаторной оптимизации // Экономика и матем. методы / О. А. Емец, Е. М. Емец. – 2000. – Т. 36. – № 2. – С. 141–144.
6. Емец О. А. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Кибернетика и системный анализ / О. А. Емец, Л. Г. Евсеева, Н. Г. Романова. – 2001. – № 3. – С. 131–138.
7. Валуйская О. А. Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна-Яковлева // Журн. вычислит.математ и матем. физики / О. А. Валуйская, О. А. Емец, Н. Г. Романова. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 591–596.

8. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
9. Ємець О. Моделювання задачами оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією на поліпереставленнях // Вісник націон. ун-ту «Львівська Політехніка» / О. Ємець, Н. Романова. – 2005. – № 540. Сер. «Фіз.-матем. науки». – С. 65–68.
10. Ємець О. О. Безумовна задача оптимізації дробово-лінійної цільової функції на поліпереставленнях: зведення до лінійної умовної на спеціальній комбінаторній множині // Радиоэлектроника и информатика / О. О. Ємець, Н. Г. Романова. – 2005. – № 1. – С. 70–73.
11. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування : монографія / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
12. Ємець О. О. Дискретна математика : навч. посіб. / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – 2-ге вид., допов. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2009. – 287 с.
13. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках / О. А. Емец, Н. Г. Романова. – К. : Наук. думка, 2010. – 105 с.
14. Ємець О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації: монографія / О. О. Ємець, О. О. Черненко. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 204 с.
15. Хофман А. Введение в прикладную комбинаторику / А. Хофман. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

УДК 65.012.122 : 004.023

ПЛАНУВАННЯ ВИКОНАННЯ ЗАМОВЛЕНЬ МЕТАЛУРГІЙНИМИ ПІДПРИЄМСТВАМИ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗКІВ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ

Т. А. Желдак, *к.т.н., доцент*
Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
timer@i.ua

Більшість металургійних підприємств, мають значний сортамент продукції та широке коло клієнтів. Послідовна обробка