МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

XI Международного семинара

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,

посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. ЛУПАНОВА

(Москва, 18–23 июня 2012 г.)

Издательство механико-математического факультета МГУ

Москва 2012

М34
УДК 519.7

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 12–01–06040

М34 Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.) / Под редакцией О. М. Касим-Заде. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. — 453 с.

Сборник содержит материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова, проходившего на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова с 18 по 23 февраля 2012 г. при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12–01–06040). Для студентов, аспирантов и научных работников в области дискретной математики и математической кибернетики.

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ
XI МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,
посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова
(Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.)

Под общей редакцией О. М. КАСИМ-ЗАДЕ

Редакционная группа:
О. С. Дудакова, К. А. Зыков, Р. М. Колпаков,
В. В. Кочергин, А. В. Чашкин

Ответственный за выпуск *В. В. Кочергин*

Н/К
ИД № 04059 от 20.02.2001 Подписано к печати 02.08.2012. Формат 60 × 90/16.
Бумага типогр. № 1. Печ. л. 28,5. Тираж 200 экз.
Издательство механико-математического факультета МГУ. 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ.
Отпечатано с оригинал-макета в типографии «11-й ФОРМАТ», Москва

КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

О. А. Емец, Е. М. Емец, Ю. Ф. Олексийчук (Полтава)

В работе рассматривается комбинаторная задача нахождения максимального потока и методы ее решения. Рассматриваемая задача является обобщением задачи нахождения максимального потока и позволяет расширить класс моделируемых задач.

Постановка задачи. Пусть транспортная сеть [1] задана графом $\Gamma = (V, U)$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}\}$ и множеством дуг U. Дугу из вершины v_i у вершину v_j будем обозначать u_{ij}. Пропускная способность дуги u_{ij} равна $b_{ij} \geq 0$. Источник будем обозначать v_s, сток — v_t.

Потоком называют функцию $w : U \to R$ со следующими свойствами:

1. Значение функции w на дуге u_{ij} не может превышать пропускную способность дуги, то есть $w(u_{ij}) \leq b_{ij}$.

2. Сохранение баланса во всех вершинах, кроме стока и источника, то есть $\sum_{u_{iz} \in U} w(u_{iz}) = \sum_{u_{zj} \in U} w(u_{zj})\ \forall z,\ z \neq s,\ z \neq t$.

Величиною потока $|w|$ будем называть суму значений функции w по исходящим из источника дугам: $\sum_{u_{si} \in U} w(u_{si}) = |w|$.

В задаче нахождения максимального потока наложим дополнительные ограничения. Пусть поток по дугам $u_{ij} \in U' \subseteq U$ может принимать значения, которые не превышают число $x_{ij} = g_l \in G$, то есть $w(u_{ij}) \leq x_{ij}$, где $G = \{g_1, g_2, ..., g_\eta\}$ — заданное мультимножество; причем вектор из x_{ij} является k-размещением из η элементов мультимножества G, то есть $x = (x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, ..., x_{i_k j_k}) \in E^k_{\eta n}(G)$, где n — количество элементов основы [2].

Назовем эту задачу комбинаторной задачей нахождения максимального потока. Рассматриваемая задача впервые была поставлена в [3] и до этого не рассматривалась.

Математическая модель задачи. Пусть поток по дуге u_{ij}, равен y_{ij}, то есть $y_{ij} = w(u_{ij})$. Задача состоит в отыскании максимального значения функции f и соответственных значений x_{ij}, y_{ij}:

$$f = \sum_{u_{jt} \in U} y_{jt} \to \max, \tag{1}$$

при выполнении условий: сохранение баланса в вершинах

$$\sum_{u_{iz}\in U} y_{iz} = \sum_{u_{zj}\in U} y_{zj}, z \neq t, z \neq s, \tag{2}$$

ограничения на пропускную способность дуг

$$0 \leq y_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall u_{ij} \in U, \tag{3}$$

и при дополнительных комбинаторных ограничениях

$$y_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall u_{ij} \in U, \tag{4}$$

$$x = (x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \ldots, x_{i_k j_k}) \in E_{\eta n}^k (G). \tag{5}$$

Задача (1)–(5) является частным случаем линейной задачи евклидовой частично комбинаторной оптимизации на размещениях [2].

Методы решения. Известны методы решения евклидовых комбинаторных задач на размещениях (см. например, [2–5]), которые применимы для решения комбинаторной задачи нахождения максимального потока [3]. Справедлива теорема.

Теорема. *Комбинаторная задача нахождения максимального потока является NP-трудной.*

Учитывая NP-трудность задачи, актуальной является разработка приближенных методов. В [6] предложен "жадный" алгоритм для решения задачи. Идея метода состоит в том, что на каждом этапе находится самый короткий путь из источника в сток (если таких путей несколько, то выбирается путь с максимальной пропускной способностью без учета комбинаторных ограничений). Затем x_{ij} с найденного пути принимают значения, которые максимизируют допустимый поток по этому пути. После этого находится остаточная сеть и т. д. Справедливо такое утверждение.

Теорема. *Время работы жадного алгоритма для комбинаторной задачи нахождения максимального потока $T(n) = O(|U||n||w^*|)$, где $|U|$ — количество дуг в графе, n —количество разных элементов в мультимножестве G, $|w^*|$ — искомая величина максимального потока.*

Рассмотрим применение метода ветвей и границ для решения задачи. Пронумеруем дуги, на которые наложены комбинаторные ограничения: $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Как начальное рекордное значение можно взять решение, полученное некоторым приближенным методом, например жадным алгоритмом. Начальным етапом будем считать классическую задачу нахождения максимального потока (без комбинаторных ограничений), начальной оценкой — ее решение.

Ветвление делается так: для u_i полагаем x_i равным всем доступным значениям из G (по порядку). Оценкой будет решение классической задачи с пропускними способностями $b^*_{ij} = \min(b_{ij}, x_{ij})$. Если оценка больше рекордного значения, продолжаем ветвление, иначе — отсекаем вершину (очевидно, что добавление дополнительных ограничений не может увеличить максимальный поток). Изменяя $i = 1, 2, \ldots, k$ и используя поиск в глубину находим решение задачи.

Список литературы

1. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.

2. Стоян Ю. Г., Емец О. О. Теория и методы евклидовой комбинаторной оптимизации. — К.: СДО, 1993. — 188 с.

3. Емець О. О., Емець Е. М., Олексійчук Ю. Ф. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями // Таврический вестник информатики и математики. — 2011. — № 1. — С. 43–50.

4. Емец О. А., Емец Е. М., Олексийчук Ю. Ф. Прямой метод отсечений для задач комбинаторной оптимизации с дополнительными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 116–124.

5. Барболина Т. Н., Емец О. А. Полностью целочисельный метод отсечения для решения линейных условных задач оптимизации на размещениях // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2005. — Т. 45, № 2. — С. 254–261.

6. Емец О. А., Емец Е. М., Олексийчук Ю. Ф. Методы решения задачи нахождения максимального потока с дополнительными комбинаторными ограничениями // Материалы 3-й международной конференции "Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии" (Кишинев, 19–23 марта 2012 г.). — Кишинев: Эврика, 2012. — С. 333–337.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Пленарные доклады

Секция «Синтез, сложность и надежность управляющих систем»

Секция «Комбинаторный анализ»