МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
XI Международного семинара
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,
посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. ЛУПАНОВА

(Москва, 18–23 июня 2012 г.)

Издательство механико-математического факультета МГУ

Москва 2012

М34
УДК 519.7

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 12–01–06040

М34 Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.) / Под редакцией О. М. Касим-Заде. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. — 453 с.

Сборник содержит материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова, проходившего на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова с 18 по 23 февраля 2012 г. при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12–01–06040). Для студентов, аспирантов и научных работников в области дискретной математики и математической кибернетики.

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ
XI МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,
посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова
(Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.)

Под общей редакцией О. М. КАСИМ-ЗАДЕ

Редакционная группа:
О. С. Дудакова, К. А. Зыков, Р. М. Колпаков,
В. В. Кочергин, А. В. Чашкин

Ответственный за выпуск *В. В. Кочергин*

Н/К
ИД № 04059 от 20.02.2001 Подписано к печати 02.08.2012. Формат 60 × 90/16.
Бумага типогр. № 1. Печ. л. 28,5. Тираж 200 экз.
Издательство механико-математического факультета МГУ. 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ.
Отпечатано с оригинал-макета в типографии «11-й ФОРМАТ», Москва

К ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

О. А. Емец, А. О. Емец (Полтава)

Определенный класс задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях [1] порождает задачу минимизации линейной функции на множестве размещений, когда сумма элементов размещения — единица [2]:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \min; \tag{1}$$

$$x = (x_1, ..., x_k) \in E_{\eta\nu}^k(G); \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = 1, \tag{3}$$

где $G = \{g_1, ..., g_\eta\}$ — известное мультимножество, c_j, $g_j \in R^1$, $E_{\eta\nu}^k(G)$ — общее множество k-размещений [3].

Для ее решения предлагается использовать методологию метода ветвей и границ (МВГ).

Рассмотрим способ ветвления множества допустимых решений на подмножества в МВГ. Упорядочим коэффициенты целевой функции согласно неравенств:

$$c_{\alpha_1} \geq c_{\alpha_2} \geq ... \geq c_{\alpha_l} \geq 0 > c_{\alpha_{l+1}} \geq ... \geq c_{\alpha_k}, \tag{4}$$

а элементы мультимножества G считаем, без ограничения общности рассуждений, пронумерованными так, что выполняются соотношения:

$$g_1 \leq g_2 \leq ... \leq g_k \leq g_{k+1} \leq ... \leq g_\eta. \tag{5}$$

Ветвления предлагается делать "в глубину", определяя одну за одной переменные в векторе $x \in E_{\eta\nu}^k$ в порядке номеров $\alpha_1, \alpha_2, ...,$ α_{l-1}, α_l, а потом $\alpha_k, \alpha_{k-1}, ..., \alpha_{l+2}, \alpha_{l+1}$, где порядок определяется условиями (4), придавая значения переменным с номерами $\alpha_1, \alpha_2, ...,$ α_l последовательно $g_1, g_2, ...$, а переменным с номерами $\alpha_k, \alpha_{k-1}, ...,$ α_{l+1} — последовательно значения $g_\eta, g_{\eta-1}, ...$ Если дальнейшее ветвление "в глубину" не возможно (множество пустое или одноэлементное), происходит возврат на предыдущий уровень дерева ветвлений с присвоением ранее определенной переменной следующего в изложенном порядке значения.

Рассмотрим способ оценивания допустимых подмножеств решений в МВГ. Пусть при описанном способе ветвления при образовании подмножества Q множества допустимых решений задачи (1)–(3) уже определились переменные $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, ..., x_{\beta_t}$. Очевидно, что в силу (4) имеем:

$$c_{\beta_1} \geq c_{\beta_2} \geq ... \geq c_{\beta_t}. \tag{6}$$

Переменные, которые остались неопределенными, обозначим $\tilde{x}_1$, ..., $\tilde{x}_\tau$, где $t+\tau = k$. Нумерацию этих неопределенных переменных, не нарушая общности рассуждений, осуществим так, чтобы выполнялись следующие соотношения для коэффициентов $\tilde{c}_j$ целевой функции при переменных $\tilde{x}_j$ $\forall j \in J_\tau$:

$$\tilde{c}_1 \geq \tilde{c}_2 \geq \tilde{c}_\lambda \geq 0 > \tilde{c}_{\lambda+1} \geq ... \geq \tilde{c}_\tau. \tag{7}$$

Значения t переменных

$$x_{\beta_1} = g_{i_1}, ..., x_{\beta_t} = g_{i_t}, \tag{8}$$

которые определены согласно описанных правил ветвления при образовании подмножества Q, объединим в мультимножество $G_B = \{g_{i_1}, ..., g_{i_t}\}$. Тогда значения неопределенных переменных могут выбираться из мультимножества $\tilde{G}$, которое является разностью муль- тимножеств G и G_B: $\tilde{G} = G - G_B = \{\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_\chi\}$, где $\chi + t = \eta$. Пусть элементы $\tilde{G}$ пронумерованы так, что

$$\tilde{g}_1 \leq \tilde{g}_2 \leq \cdots \leq \tilde{g}_\chi. \tag{9}$$

Суммируя слагаемые целевой функции значениями переменных $x_{\beta_1}, ..., x_{\beta_t}$, определенные в (8), получим такое выражение:

$$\nu = \sum_{p=1}^{t} c_{\beta_p} g_{i_p}. \tag{10}$$

Как известно, число ξ в задаче минимизации функций $F(x)$ на множестве $x \in D$ в МВГ является оценкой подмножества $D_i \subset D$, если $\xi \leq F(x)$ $\forall x \in D_i$.

Теорема 1. *Оценкой* ξ *подмножества* Q, *определяемого условием* (8), *множества допустимых решений задачи* (1)–(3) *является величина*

$$\xi = \nu + c^*, \tag{11}$$

где ν вычисляется по формуле (10), *а*

$$c^* = \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j + \sum_{j=1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} \tag{12}$$

при условиях (7), (9).

Обозначим подмножество Q допустимых решений в МВГ для задачи (1)–(3) так:

$$D^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r} = \{x = (x_1, ..., x_k) \in R^k | x_{\beta_j} = g_{i_j} \ \forall j \in J_r,$$

$$\forall r \in J_n, (\beta_1, ..., \beta_r) \in E^r_k(J_k); (i_1, ..., i_r) \in E^r_\eta(J_\eta)\},$$

где $E^r_k(J_k)$ обозначает [3] множество r-размещений без повторений из множества $J_k = \{1, 2, ..., k\}$; β_j, i_j удовлетворяют (6), (8) при условии $r = t$. Оценку ξ этого множества, определенную по формулам (10)–(12) при условиях (6), (7), (9) обозначим $\xi^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r}$. Имеет место теорема.

Теорема 2. *Между оценками подмножеств*

$$D^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r} \quad и \quad D^{\beta_1 \ldots \beta_r \ldots \beta_{r+\chi}}_{i_1 \ldots i_r \ldots i_{r+\chi}}$$

справедливо соотношение: $\xi^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r} \leq \xi^{\beta_1 \ldots \beta_{r+\chi}}_{i_1 \ldots i_{r+\chi}}$, *где* $r + \chi \leq k$, $\forall r \in J_{k-1}$ $\forall \chi \in J^0_{k-1} = J_{k-1} \cup \{0\}$, $(\beta_1, ..., \beta_q) \in E^q_k(J_k)$; $q \in \{r; r+\chi\}$, $(i_1, ..., i_q) \in E^q_\eta(J_\eta)$; *величины* $i_j \in J_\eta$ *и* $\beta_1, ..., \beta_{r+\chi}$ *удовлетворяют условиям* (6), (8).

Доказано еще одно свойство оценки допустимых пожмножеств в МВГ, позволяющее улучшать отсечения.

В докладе приводятся доказательства этих теорем.

Список литературы

1. Емец О. А., Ольховская Е. В. Итерационный метод решения комбинаторных задач игрового типа на размещениях // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 69–78.

2. Емець О. О., Емець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. Монографія. — Полтава: ПУЕТ, 2011.

3. Стоян Ю. Г., Емец О. О. Теория и методы евклидовой комбинаторной оптимизации. — К.: н-т системн. досліджень освіти, 1993.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие 3

Пленарные доклады

М. П. Минеев, В. Н. Чубариков О новых применениях арифметики в криптографии 4
Н. П. Редькин О сложности индивидуальных булевых функций ... 26
М. А. Федоткин Системы управления конфликтными потоками неоднородных требований и принцип Ляпунова — Яблонского 35
И. В. Кучеренко Решение проблемы описания границ рекурсивных классов обратимых клеточных автоматов 42
В. Н. Шевченко Триангуляции выпуклых конусов и реализация их f-векторов 49
В. А. Захаров Модели и алгоритмы в задаче проверки эквивалентности программ 53
Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков Сложность расшифровки пороговых функций многозначной логики 63

Секция «Синтез, сложность и надежность управляющих систем»

Ф. М. Аблаев, А. В. Васильев Квантовый метод отпечатков для модели квантовых коммуникационных вычислений 78
Ф. М. Аблаев, К. Р. Хадиев Уточнение иерархии классов булевых функций, представимых в моделях k-OBDD ветвящихся программ 80
В. Б. Алексеев О билинейной сложности перемножения матриц размеров 2×4 и 4×2 82
М. А. Алехина О сложности асимптотически оптимальных по надежности схем при однотипных константных неисправностях на выходах элементов 85
А. А. Андреев Об одной последовательности функций многозначной логики 88
О. Ю. Барсукова О числе полных базисов из двухвходовых элементов с заданным коэффициентом ненадежности 91
А. Ю. Бернштейн, Н. В. Шилов Мультиагентная геометрическая задача о назначениях: информационный аспект 92
М. Блезер, Б. В. Чокаев О почти билинейных алгоритмах для локальных и сверхосновных алгебр 95
С. В. Блинов, С. А. Ложкин О синтезе рекурсивных схем из функциональных элементов с ограниченной глубиной рекурсии 98

А. С. Нагорный О пересечениях классов монотонных функций многозначной логики 207
Д. Ю. Панин О полноте систем монотонных одноместных функций в P_k 210
Д. К. Подолько О некоторых свойствах операции суперпозиции специального вида 212
С. Н. Селезнева Нижняя оценка сложности нахождения полиномов булевых функций в одном классе схем с разделенными переменными 216
Л. Н. Сысоева Универсальные множества обобщенных формул 218
В. П. Тарасова Позиционно-оптимальные стратегии поиска области наибольших значений функции (многомерный случай) 220
Р. В. Хелемендик О трансляции формул логики линейного времени в формулы логики ветвящегося времени 223

Секция «Комбинаторный анализ»

М. А. Башов Несуществование аналога теоремы Краскала — Катоны для задачи минимизации двусторонней тени 227
Д. Белаззогу, Р. М. Колпаков, М. Раффино Об эффективном поиске буквенных составов в фрагментах двумерных слов 230
Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова Статистики на vp-монотонных перестановках 231
Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова Статистики на группе перестановок и перманенты 234
В. А. Емеличев, В. В. Коротков Инвестиционная булева задача с критериями Вальда и Сэвиджа в условиях неопределенности 237
О. А. Емец, А. О. Емец К оптимизации на размещениях 240
О. А. Емец, Е. М. Емец, Ю. Ф. Олексийчук Комбинаторная задача нахождения максимального потока 243
А. Н. Исаченко, Я. А. Исаченко H-периметр и L-окружение матроида 246
А. Н. Исаченко, А, М. Ревякин Базово упорядоченные матроиды 249
Л. М. Коганов Эквивалентность правил Мэзона для передаточной функции в графе сигнальных потоков основной формуле метода трансфер-матрицы 252
В. К. Леонтьев Производящие функции в задаче о ранце 255
В. Е. Маренич Простые решеточные матрицы над дистрибутивными решетками 257
Е. Е. Маренич Теорема Фробениуса для полугруппы матриц над дистрибутивной решеткой 260
А. М. Ревякин Координатизация матроидов 263